ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ТЕМА I. МНОЖЕСТВА И ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Основные понятия

Определение. Множеством называется совокупность объектов любой природы, которые объединены в одну группу (систему, совокупность) по тем или иным признакам (множество городов, множество положительных чисел, множество студентов, множество действительных чисел и т.д.).

Принадлежность элемента x множеству X обозначается $x \in X$.

Способы записи множеств: $A=\{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$, $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$, $A=\{a \in \mathrm{R} \mid \ |a| \geq 1\}$. $X=\{x: \ |x-a| \leq b\}$.

Определение. Множество U образует линейное пространство, если для любых двух его элементов $\vec{X} \in$ U и $\vec{Y} \in$ U определена операция сложения: $\vec{X}+\vec{Y}=U$ и операция умножения любого элемента на число: $\lambda\vec{X} \in U$ удовлетворяющее свойствам:

1) $\vec{X}+\vec{Y}=\vec{Y}+\vec{X}$,
2) $\vec{X}+\vec{0}=\vec{X}$,
3) $\lambda(\vec{X}+\vec{Y})=\lambda\vec{X}+\lambda\vec{Y}$,
4) $(\vec{X}+\vec{Y})+\vec{Z}=\vec{X}+(\vec{Y}+\vec{Z})$,
5) $\vec{X}+(-\vec{X})=0$,
6) $(\alpha+\beta)\vec{X}=\alpha\vec{X}+\beta\vec{X}$,
7) $\alpha+(\beta\vec{X})=\alpha\vec{X}\beta$,
8) $1\vec{X}=\vec{X}$,

где $\vec{Z} \in U$, $\vec{0}$,- нулевой элемент $(\vec{0} \in U)$, а коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, 1$ – действительные числа.

Определение. Вектором размерности n называется упорядоченный набор из n действительных чисел. Будем записывать вектор в виде $\vec{X}=(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где $x_i.(i=1,2,\ldots n)$ координаты вектора. Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Векторы равны, если они одной размерности и имеют равные соответствующие координаты (2,3,5) = (2,35). Нуль-вектор $\vec{0}$ = (0,0,…0) не следует путать с числом нуль.

Определение. Множество всех векторов размерности n называется арифметическим n-мерным векторным пространством и обозначается R^n.

Экономические величины являются многофакторными (многомерными), и n-мерные векторы служат удобной формой их представления. Например, некоторый набор товаров различных сортов можно охарактеризовать вектором $\vec{T}=(t_1, t_2 \ldots t_n)$, а соответствующие цены– вектором $\vec{P}=(p_1, p_2, \ldots p_n)$.

§2. Действия над *n*-мерными векторами

Пусть даны векторы $\vec{X} \in R^n$ и $\vec{Y} \in R^n$

Определение. Суммой векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ называется вектор $\vec{X}+\vec{Y}=(x_1+y_1; x_2+y_2; \ldots x_n+y_n)$, т.е. при сложении векторов их соответствующие координаты складываются: (2, -4) + (-2,4) = (0,0); (3,0,1) = (0,1,4)+(-1,-7,0) = (2,-6,5).

Определение. Произведением вектора $\vec{X}=(x_1, x_2, \ldots x_n)$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{X}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n)$, т.е. при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

Можно проверить, введенные таким образом операции над векторами удовлетворяют всем свойствам операции в линейном пространстве. Следовательно, арифметическое n-мерное пространство R^n является частным случаем введенного ранее линейного пространства.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{X}=(x_1, x_2, \ldots x_n)$, и $\vec{Y}=(y_1, y_2, \ldots y_n)$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат векторов: $\vec{X} \cdot \vec{Y}=x_1 y_1+x_2 y_2+\ldots+x_n y_n$.

Пример: Пусть $\vec{A} = (2,4)$ и $\vec{B} = (-1,7)$.

Тогда $\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 = 26$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\vec{X} \cdot \vec{X} \geq 0$, причем $\vec{X} \cdot \vec{X} = 0$, только при $\vec{X} = 0$,
2) $(\vec{X} + \vec{Y}) \cdot \vec{Z} = \vec{X} \cdot \vec{Z} + \vec{Y} \cdot \vec{Z}$,
3) $(\lambda \vec{X}) \cdot \vec{Y} = \lambda (\vec{X} \cdot \vec{Y})$,
4) $\vec{X} \cdot \vec{Y} = \vec{Y} \cdot \vec{X}$

Определение. Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0, т.е. $\vec{X} \cdot \vec{Y} = 0$

Пример. Пусть $\vec{X} = (7,-3,5)$ и $\vec{Y} = (1,9,4)$. Тогда $\vec{X} \cdot \vec{Y} = 7 \cdot 1 + (-3) \cdot 9 + 5 \cdot 4 = 0$, т.е. $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ ортогональны.

Определение. Линейное пространство с введенным скалярным произведением называется евклидовым *n*-мерным пространством.

Примеры:

1) Множество трехмерных векторов R^3.
2) Множество двумерных векторов R^2.
3) Множество R^1 = R – множество действительных чисел.

§ 3. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}$ - векторы из некоторого линейного пространства.

Определение: Линейной комбинацией векторов $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}$, называется выражение вида: $\lambda_1 \vec{A_1} + \lambda_2 \vec{A_2} + \ldots + \lambda_n \vec{A_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ - действительные числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

Линейная комбинация дает в результате сложения векторов, умноженных на число $(\lambda_1 \vec{A_1}, \lambda_2 \vec{A_2}, \ldots, \lambda_n \vec{A_n})$, также вектор.

Примеры:

1) 2 (2,5,1) – 4 (1,3,0) + (0,0,1) = (0,-2,3);
2) 3 (5,4) – 5 (-1,2) +2 (-10,-1) = (0,0).

Последний пример показывает, что в некоторых случаях можно в результате линейной комбинации векторов $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_n}$ получить нулевой вектор $\vec{0}$ при ненулевых коэффициентах (при всех нулевых коэффициентах $\lambda_i = 0$ мы всегда получим $\vec{0}$).

Определение. Система векторов называется линейно-зависимой, если из этих векторов можно составить нулевую линейную комбинацию, когда хотя бы один из коэффициентов ее отличен от нуля. Так, в предыдущем примере векторы (5,4), (-1,20, (-10,1) линейно зависимы.

Если система векторов линейно - зависима, то хотя бы один вектор (при нем стоит отличный от нуля коэффициент) можно выразить линейно через остальные.

Если $N_к \neq 0$, то

$$\vec{A_k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_к}\vec{A_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_к}\vec{A_2} - \ldots - \frac{\lambda_{к-1}}{\lambda_к}\vec{A_{k-1}} - \frac{\lambda_{к-1}}{\lambda_к}\vec{A_{k+1}} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_к}\vec{A_n}$$

И наоборот, если вектор $\vec{A_0}$ представлен в виде линейной комбинации остальных векторов $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \ldots, \vec{A_n}$, то в совокупности с ними дает систему $\vec{A_0}, \vec{A_1}, \vec{A_2}, \ldots, \vec{A_n}$ линейно зависимых векторов, т.к. в комбинации $-1 \cdot \vec{A_0} + \lambda_1 \vec{A_1} + \lambda_2 \vec{A_2} + \ldots + \lambda_n \vec{A_n} = \vec{0}$ коэффициент $\lambda_0 = -1 \neq 0$

Определение. Система векторов называется линейно-независимой, если из этих векторов невозможно составить нулевую линейную комбинацию, с которой хотя бы один из коэффициентов был бы отличен от 0. Т.е. векторы $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \ldots \vec{A_n}$ будут линейно -независимы, если равенство $\lambda_1 \vec{A_1} + \lambda_2 \vec{A_2} + \ldots + \lambda_n \vec{A_n} = 0$ возможно лишь при всех $\lambda_i = 0 \quad (i = 1.2. \ldots n)$. Очевидно, ни один из этих векторов нельзя выразить через остальные.

Пример. Будут ли векторы $\vec{A}=(2,4)$ и $\vec{B}=(5,1)$ линейно зависимы?

Решение. Составим линейную комбинацию $\lambda\vec{A}+\beta\vec{B}=0$. Поставим координаты и выполним действие над векторами: $\lambda(2,4)+\beta(5,1)=(0,0)\Rightarrow(2\lambda,4\lambda)+(5\beta,\beta)=(0,0)\Rightarrow(2\lambda+5\beta,4\lambda+\beta)=(0,0)$.

В равных векторах должны быть равны соответствующие координаты:

$$\begin{cases}2\lambda+5\beta=0,\\4\lambda+\beta=0\end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получаем: $\lambda=0,\beta=0,$ а это значит, что $\vec{A}$ и $\vec{B}$ линейно независимы.

Пример. Будут ли векторы $\vec{A}=(2,4)$, $\vec{B}=(5,1)$ и $\vec{C}=(2,1)$ линейно зависимы?

Решение. Составим линейную комбинацию и приравняем ее к $\vec{0}$: $\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}=\vec{0};\quad \alpha(2,4)+\beta(5,1)+\gamma(2,1)=(0,0).$

Выполнил действие над векторами и приравняв координаты равных векторов, получим

$$\begin{cases}2\alpha+5\beta+2\gamma=0,\\4\alpha+\beta+8\gamma=0\end{cases}$$

Решив систему уравнений: $\alpha=\dfrac{\beta}{2},\gamma=-3\beta$

В этом решении число β играет роль параметра; задавая его произвольно, будем получать значения α и γ, которые вместе с β дают то или иное решение системы. Так, при $\beta\neq0$ получим $\gamma\neq0$ и $\alpha\neq0$, из чего следует, что векторы $\vec{A},\vec{B},\vec{C},$ дают нулевую линейную комбинацию при нулевых коэффициентах, т.е. они линейно зависимы.

§ 4. Базис. Разложение векторов по базису

Определение. Базисом в пространстве R^n называется любая система из n линейно-независимых векторов. Каждый вектор из R^n, входящих в базис, можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е разложить по базису.

Пусть $B=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ - базис пространства R^n и $\vec{b}\in R^n$. Тогда найдутся такие числа $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$, что $\vec{b}=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+...+\lambda_na_n$.

Коэффициенты разложения $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ называются координатами вектора $\vec{b}$ в базисе B. Если задан базис, то коэффициенты вектора определяются однозначно.

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a_1}=(2,0,0)$, $\vec{a_2}=(0,-1,1)$, $\vec{a_3}=(0,1,4)$ образуют базис в R^3.

Решение. Покажем, что равенство $\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\lambda_3\vec{a_3}=0$ возможно только при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$:

$$\lambda_1(2,0,0)+\lambda_2(0,-1,1)+\lambda_3(0,1,4)=(0,0,0);$$

$$(2\lambda_1,-\lambda_2+\lambda_3,\lambda_2+4\lambda_3)=(0,0,0),$$

или $\begin{cases}2\lambda_1=0,\\-\lambda_2+\lambda_3=0,\\\lambda_2+4\lambda_3=0.\end{cases}$

Решив систему, получим $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\lambda_3=0$. Так как все $\lambda_i=0\quad(i=1,2,3)$, то $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ линейно – независимы. Они могут составить базис в R^3.

Очевидно, любой новый набор из векторов $\vec{a_1}=(C_1,0,0)$, $\vec{a_2}=(0,C_2,0)$, $\vec{a_3}=(0,0,C_3)$ может тоже быть взятым в качестве базиса в R^3. Итак, базис может быть выбран неединственным образом.

Пример. Разложить вектор $\vec{b}=(0,4,3)$ по базису $\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\}$.

Решение. $\vec{b}=\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\lambda_3\vec{a_3}$. Подставим координаты всех векторов и выполнил действия над ними:

$$(0,4,3)=\lambda_1(2,0,0)+\lambda_2(0,-1,1)+\lambda_3(0,1,4);$$
$$(0,4,3)=(2\lambda_1,-\lambda_2+\lambda_3,\lambda_2+4\lambda_3).$$

Приравняв координаты, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}0=2\lambda_1,\\ 4=-\lambda_2+\lambda_3,\\ 3=\lambda_2+4\lambda_3\end{cases}$$

Решим ее: $\lambda_1=0,\lambda_2=-\dfrac{13}{5},\lambda_3=\dfrac{7}{5}$.

Таким образом, получим разложение: $\vec{b}=-\dfrac{13}{5}\overrightarrow{a_2}+\dfrac{7}{5}\overrightarrow{a_3}$

В базисе $\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\}$ вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(0,-\dfrac{13}{5},\dfrac{7}{5})$.

Замечание. В каждом n-мерном векторном пространстве можно выбрать бесчисленное множество различных базисов. В различных базисах один и тот же вектор имеет различные координаты, но единственные в выбранном базисе.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

1. Что называется линейным пространством. Приведете примеры.
2. Что называется n-мерным вектором.
3. Дайте определение линейных операций над n-мерными векторами. Что называется линейной комбинацией векторов.
4. Что называется арифметическим n-мерным вектором, пространством, евклидовым линейным пространством. Приведите примеры.
5. В каком случае система векторов называется линейно независимой.
6. Что называется базисом векторного пространства.
7. Что называется координатами вектора в данном базисе.
8. Что называется размерностью векторного пространства.

Литература[1]: [1] (63-93); [2] (22-56); [3] (93-106); [5] (9-14), (23-27), [9] (103 - 111).

ТЕМА 2. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решение экономических задач применяются методы экономико-математического моделирования, использующие решение систем линейных алгебраических уравнений. Для изучения методов решения систем уравнений введем понятия о матрицах и определителях.

§ 1. Виды матриц

Определение. Таблица $m\times n$ чисел a_{ij} вида.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}...a_{1n}\\ a_{21}a_{22}...a_{2n}\\ ...\\ a_{m1}a_{n2}...a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}a_{11}a_{12}...a_{n}\\ a_{21}a_{22}...a_{2n}\\ ...\\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn}\end{Vmatrix}=(a_{ij})=\|a_{ij}\|$$

Состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей.

Числа a_{ij} стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца, называются элементами матрицы.

Матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются равными, если они имеют одинаковые размеры и для каждой пары индексов выполняется равенство $a_{ij}=b_{ij}.$

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$0=\begin{pmatrix}0\ 0...0\\ 0\ 0...0\\ ...\\ 0\ 0...0\end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой $m=n$, называется квадратной матрицей n-го порядка.

В квадратной матрице элементы a_{11}, a_{22}, $\ldots a_{nn}$ составляют главную диагональ, а элементы a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $\ldots a_{n1}$ побочную диагональ. Квадратная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, а все остальные элементы равны нулю, называется единичной:

[1] Список литературы – в конце пособия. Номер книги в квадратных скобках, страниц – в круглых.

$$E = \begin{pmatrix} 1\,0 \ldots 0 \\ 0\,1 \ldots 0 \\ \ldots \\ 0\,0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

§ 2. Действия над матрицами

1. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$ на число λ называется матрица

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11}\lambda a_{12}\ldots\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21}\lambda a_{22}\ldots\lambda a_{2n} \\ \ldots \\ \lambda a_{n1}\lambda a_{m2}\ldots\lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример. Найти произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 3$:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

2. Сложение (вычитание) матриц

Суммой (разностью) матриц A и B, в каждой из которых m строк и n столбцов, называется матрица C с элементами, равными суммам (разностям) существующих элементов слагаемых:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\ldots b_{1n} \\ b_{21}b_{22}\ldots b_{2n} \\ \ldots \\ b_{m1}b_{m2}\ldots b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{тогда}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \ldots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \ldots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \ldots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 21 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Решение. $A + B = \begin{pmatrix} 20 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

3. Умножение матриц

Пусть даны матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kn} \end{pmatrix}$ размерности $k \times n$ и

матрица $B = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\ldots b_{1m} \\ b_{21}b_{22}\ldots b_{2m} \\ \ldots \\ b_{k1}b_{k2}\ldots b_{nm} \end{pmatrix}$ размерности $n \times m$.

Пусть число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B (в этом случае матрицу A называют согласованной с матрицей B).

Произведением матрицы A на матрицу B называется такая матрица $AB = C = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}...c_{1m} \\ c_{21}c_{22}...c_{2m} \\ ... \\ c_{k1}c_{k2}...c_{km} \end{pmatrix}$ размерности $k \cdot m$, каждый элемент которой $C_{ij}(i = 1,..., k;\ j = 1,...m)$ находится как сумма произведений элементов, взятых по порядку из i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

Решение:

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-3) & 2\cdot 1 + 0\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ -1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 2\cdot(-3) & -1\cdot 1 + 3\cdot 5 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 4\cdot(-3) & 0\cdot 1 + 1\cdot 5 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 18 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$

Еще раз отметим, что в матрице-произведении число строк равно числу строк матрицы A и число столбцов равно числу столбцов матрицы B.

§3. Определители

Понятие определителя вводится только для квадратной матрицы и представляет собой число, которое находится по определенному правилу через элементы, составляющих данную матрицу.

Для квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nm} \end{pmatrix}$ n-го порядка определитель n-го порядка обозначается символом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nm} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

В определителе различают строки и столбцы. Число a_{ij} (i=1,…,n; j=1,…,n) называются элементами определителя.

Определение: Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя (1) называется определитель (n-1)-го порядка, который получается из определителя Δ путем вычеркивания i-ой строки из j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}

Определение: Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется произведение $(-1)^{i+j}M_{ij/}$

Не вводя строгое понятие определителя, дадим лишь правило его нахождения:

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nm} \end{vmatrix}$ n-го порядка находится по формуле:

$$\Delta = \begin{cases} a_{11}, \quad \text{при} \quad n = 1; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad \text{при} \quad n > 1, \end{cases} \tag{2}$$

где i- любое из чисел 1,2,…,n, A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Найти по формуле (2) определитель 2-го порядка, выбрав, например, i=1: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \cdot |a_{22}| + a_{12}(-1)^{1+2} \cdot |a_{21}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$

Из формулы (2) следует, что вычисление определителей N-го порядка сводится к вычислению определителей (n-1)-го порядка (т.е. миноров). Те, в свою очередь, опять по формуле (2) сводятся к определителям (n-2)-го порядка. Процесс нахождения определителей продолжается до получения миноров 2-го или 1-го порядка. Запись (2) называется разложением определителя по элементам i-ой строки.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1 - 10) - 3 \cdot (0 - 20) + 1(0 - 4) = 34$$

Разложение было выполнено по элементам 1-ой строки.

Заметим, что если некоторые элементы строки, по элементам которой производится разложение, равны нулю, то вычисление значительно упрощается. Обычно, пользуясь свойствами определителя, преобразуем его таким образом, чтобы в выбранной строке (выбранном столбце) все элементы кроме одного, равнялись нулю.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

1. Величина определителя не меняется от замены строк столбцами (проверьте самостоятельно). Из этого свойства следует, что определитель можно найти, разлагая его также и по элементам какого-либо столбца: $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, где j- номер любого из столбцов.
2. Если любую строку или столбец матрицы умножить на некоторое число, то определитель также умножится на это число.
3. Величина определителя не изменяется, если к элементам любой строки (столбца) прибавить элементы любой другой строки (столбца), умноженные на произвольное одинаковое число.

Пример: Вычислить определитель четверного порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение:

1)Вынесем из второго столбца за знак определителя общий множитель 2; умножим первую строку на (-4) и сложим со второй строкой; умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей; умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой, получим;

$$\Delta = 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 7\\ 3 & 1 & 8 & 5\\ 2 & 4 & 7 & 3\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -3 & -5\\ 0 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 2 & 3 & -4\end{vmatrix}$$

Вынесем за знак определителя из третьей строки общий множитель 2, получим определитель

$$\Delta = 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -3 & -5\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

Разложим определитель Δ по элементам первого столбца, получим определитель третьего порядка, который вычислим, разлагая его по элементам 1-й строки;

$$\Delta = 4\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-3 & -3 & -5\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -3\end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot\left(-3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix} - 5\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right) = 148$$

§ 4. Обратная матрица

Определение: Квадратная матрица n-го порядка называется невыраженной, если ее определитель порядка $\Delta \neq 0$. Если определитель матрицы равен нулю, то она называется вырожденной.

Определение: Матрица B называется обратной для данной квадратной матрицы A, если $AB = BA = E$, где E – единичная матрица. Обратную матрицу для данной матрицы A обозначают A^{-1}, поэтому:

$$A\times A^{-1} = A^{-1}\times A = E$$

Если квадратная матрица невыраженная, то для нее существует единственная обратная матрица.

Пусть задана квадратная матрица.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nm}\end{pmatrix}$$

Тогда обратная матрица A^{-1} находится следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}\ldots A_{n1}\\ A_{12}A_{22}\ldots A_{n2}\\ \ldots\\ A_{1n}A_{2n}\ldots A_{nn}\end{pmatrix}$$

где Δ – определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (i=1,…,n; j=1, …, n). Необходимо обратить внимание, что, находя алгебраические дополнения к элементам строк матрицы A, в обратной матрице A^{-1} мы записываем их по соответствующим столбцам.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Проверить результат, вычислив произведение данной и обратной матриц.

Решение: Определитель матрицы A вычислен ранее:

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 4 & 2 & -1\end{vmatrix} = 34.$$

Так, как $\Delta \neq 0$, то матрица A невырожденная и для нее существует обратная.

Найдем алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&5\\2&-1\end{vmatrix}=-1-10=-11;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&5\\1&-1\end{vmatrix}=(0-20)=-20;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\4&2\end{vmatrix}=0-4=-4;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=-(-3-2)=5;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2-4=-6;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&3\\4&2\end{vmatrix}=-(4-12)=8;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&1\\1&5\end{vmatrix}=15-1=14;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\0&5\end{vmatrix}=-(10-0)=-10;$$

$$A_{33}=(-1)^{3-3}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=2-0=2.$$

Следовательно:

$$A^{-1}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-11&5&14\\20&-6&-10\\-4&8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{34}&\frac{5}{34}&\frac{14}{34}\\ \frac{20}{34}&\frac{-6}{34}&-\frac{10}{34}\\ -\frac{4}{34}&\frac{8}{34}&\frac{2}{34}\end{pmatrix}.$$

Проверка: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&1&5\\4&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{11}{34}&\frac{5}{34}&\frac{14}{34}\\ \frac{20}{34}&-\frac{6}{34}&-\frac{10}{34}\\ -\frac{4}{34}&\frac{8}{34}&\frac{2}{34}\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}2\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+3\cdot\frac{20}{34}+1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&2\cdot\frac{5}{34}+3\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)+1\cdot\frac{8}{34}&2\cdot\frac{14}{34}+3\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)+1\cdot\frac{2}{34}\\ 0\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+1\cdot\frac{20}{34}+5\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&0\cdot\frac{5}{34}+1\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)+5\cdot\frac{8}{34}&0\cdot\frac{14}{34}+1\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)+5\cdot\frac{2}{34}\\ 4\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+2\cdot\frac{20}{34}-1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&4\cdot\frac{5}{34}+2\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)-1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right)&4\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+2\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)-1\cdot\frac{2}{34}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Ответ: $A^{-1}=\frac{1}{34}\cdot\begin{pmatrix}-11&5&14\\20&-6&-10\\-4&8&2\end{pmatrix}.$

§5. Решение системы линейных уравнений.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_{11}+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_{1n}=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2;\\ \qquad\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\qquad(1)$$

<u>Правило Крамера.</u>

Пусть составленный из коэффициентов при неизвестных определитель:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тогда система (1) имеет единственное решение

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определитель Δ_k (k=1,2,…n) получен из определителя Δ путем замены k-го столбца столбцом свободных членов системы (1).

Пример. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-3x_2+x_3=2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители Δ, Δ_1 , Δ_2 , Δ_3.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=2(2-3)+(1+3)+(-3-6)=$$

$$=-2+4-9=-7$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1. \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=(2-3)+(2+2)+(-6-4)=$$

$$=-1+4-10=-7$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=2(2+2)-(1+3)+(2-6)=8-4-4=0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=2(4+6)+(2-6)+(-3-6)=20-4-9=7$$

Тогда $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{7}=0;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{7}{-7}=-1$

Ответ: x_1=1, x_2=0, x_3= -1.

<u>Метод Гаусса</u>

Пусть дана система уравнений (1).

Предположим, что среди коэффициентов $a_{11}.a_{21},...,a_{n1}$ при неизвестном x_1 имеются коэффициенты, отличные от нуля. Пусть одним из таких коэффициентов является a_{11}. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}, получим:

$$x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+...+\frac{a_{14}}{a_{11}}x_n=\frac{b_1}{a_{11}} \qquad (2)$$

Это уравнение умножим на (-a_{21}) и сложим его со вторым уравнением системы (1), затем уравнение (2) умножим на (a_{31}) и сложим его с третьим уравнением и т.д. С помощью таких операций исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Оставляем неизменным первое уравнение системы (1), а к оставшимся применяем тот же прием, т.е. в n-2 уравнениях исключаем неизвестное x_2 и т.д.

Систему уравнений (1) приведем к треугольному виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}\,x_2 + ... + a'_{2n}\,x_n = b_2, \\ \qquad ... \\ \qquad a'_{nn}\,x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $\Delta = a_{11} \cdot a'_{22} \cdot ... \cdot a'_{nn} \neq 0$. Из последнего уравнения системы (3) найдем x_n: подставляя это значение в предыдущее уравнение, найдем x_{n-1} и т.д. Продолжая эту процедуру, дойдем до первого уравнения, из которого путем подстановки уже найденных значений x_2, x_3, …, x_n получим неизвестное x_1.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Решение. Заметим, что во втором уравнении системы коэффициент при x_1 равен 1. Поменяв местами первое и второе уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Умножим первое уравнение системы (5) на (-2) и сложим его со вторым уравнением. Затем умножим первое уравнение на (-3) и сложим его с третьим уравнением. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -5x_2 + 3x_3 = -3 \\ -9x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases} \tag{6}$$

Разделим второе уравнение системы (6) на (-5), затем полученное уравнение умножим на 9 и сложим с третьим уравнением систему (6). В результате придем к системе (7).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - \dfrac{3}{5}x_3 = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{7}{5}x_3 = \dfrac{7}{5} \end{cases} \tag{7}$$

Из третьего уравнения находим x_3=1. Подставим это значение во второе уравнение системы (7) и найдем x_2:

$$x_2 - \frac{3}{5}(-1) = \frac{3}{5}; \quad x_2 = 0$$

Подставляя полученное значение $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ в первое уравнение системы (7), найдем x_1 : $x_1 + 2\cdot0-1=2$, или $x_1 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Решение системы линейных уравнений с использованием обратной матрицы

Введем для системы линейных уравнений (1) следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}...a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}...a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Систему (1) представим в матричной форме $A\cdot X = B$, которая эквивалентна исходной. Действительно, если перемножить матрицы A и X и приравнять элементы матрицы-произведения к соответствующим элементам матрицы B, то получим систему уравнений (1).

Умножим обе части уравнения $A\cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot (A\cdot X) = A^{-1} \times B$ или $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то $E\cdot X = A^{-1} \cdot B$ или $X = A^{-1} \cdot B$.

Эта формула дает решение системы в матричной форме.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

используя обратную матрицу.

Решение. Найдем обратную матрицу к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Определитель матрицы А

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 + 2 \cdot 14 - 4 = 26$$

Так как определитель матрицы *A* отличен от 0, то обратная матрица существует. Найдем ее по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, вычислим предварительно алгебраические дополнения. Получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -14 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Найдем матричное решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -14 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 26 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется матрицей? Какие действия производятся над матрицей?
2. Что называется определителем, минором, алгебраическим дополнением? Как вычислить определитель?
3. Какая матрица называется обратной для данной матрицы и как ее можно найти?
4. Какие методы решения систем линейных уравнений Вы знаете?

Литература: [1] (9-56); [2] (5-97); [3] (50-92); [4] (259-274); [5] (309 - 324); [6] (188 – 220); [9] (70 – 71, 74 - 76).

<u>ТЕМА 3. АНАЛИТИЧЕКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ</u>

§ 1. Основные формулы в декартовых прямоугольных координатах

При решении задач аналитической геометрии будем использовать действия над векторами, заданными в координатной форме.

Пусть даны векторы $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$. Тогда:

1) при сложении (вычитании) векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получим вектор $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y)$;
2) при умножении вектора $\vec{a}$ на число λ получим вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y)$;
3) при скалярном произведении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получим число $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

<u>Расстояние между двумя точками</u>

Даня точки *A* (x_A, y_A) и В (x_B, y_B). Расстояние между ними найдем, как длину вектора $\vec{AB}$ = ($x_B - x_A$, y_B - y_A). Из скалярного произведения

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos 0=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ имеем $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}$. Подсчитав скалярное произведение через координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, получаем расстояние между двумя точками

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2} \qquad (1)$$

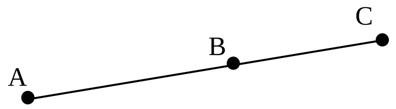
Угол между двумя векторами

Даня два вектора: $\vec{a}=\left(a_x,a_y\right)$ и $\vec{b}=\left(b_x,b_y\right)$. Найдем косинус угла между ними.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2}} \qquad (2)$$

Деление отрезка в заданном отношении

Пусть даны точки A (x_A y_A), и B (x_B y_B). требуется найти координаты точки C (x, y) , делящей отрезок AB в заданном отношении λ:



$$\lambda=\frac{|AC|}{|CB|}$$

Для решения задачи воспользуемся действием умножения вектора на число. Перепишем отношение $\lambda=\frac{|AC|}{|CB|}$ в виде: $|AC|=\lambda|CB|$. Такое соотношение длин может быть получено при выполнении действия $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ или $\left(x-x_A,y-y_A\right)=\lambda\left(x_B-x,y_B-y\right)$.

В равных векторах равны соответствующие координаты:

$x-x_A=\lambda\left(x_B-x\right),\quad y-y_A=\lambda\left(y_B-y\right)$

Из этих уравнений найдем неизвестные координаты точки C:

$$x=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda} \qquad (3)$$

Условия параллельности и перпендикулярности векторов

Так как скалярное произведение двух перпендикулярных векторов $\vec{a}=\left(a_x,a_y\right)$ и $\vec{b}=\left(b_x,b_y\right)$ равно 0, то условием перпендикулярности отличных от нуля векторов будет равенство:

$$a_xb_x+a_yb_y=0.$$

При умножении вектора $\vec{a}$ на скаляр λ $(\lambda\neq 0)$ получаем вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ одного направления с $\vec{a}$ при $\lambda>0$ и противоположного направления при $\lambda<0$. Но всегда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут параллельны.

Поэтому условием параллельности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет пропорциональность их соответствующих координат: $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}$.

Пример. Найти длину медианы CE в треугольнике ABC с вершинами: A (3,3), B (-1,1), C (0,1).

Решение. Так как E – середина отрезка AB, то по формуле (3) имеем: $x_E=\frac{3-1}{2}=1;\quad y_E=\frac{3+1}{2}=2$

Длину медианы CE найдем по формуле (1):

$$|CE|=\sqrt{(0-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$$

Пример. Какие из векторов

$\vec{a}=(2,-4),\quad \vec{b}=(2,1),\quad \vec{c}=(3,0),\quad \vec{d}=(-1,2)$ будут параллельны и какие перпендикулярны между собой?

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, т.к. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 2-4\cdot 1=0$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$ параллельны, т.к. $\vec{a}=-2\vec{d}$.

Пример. Найти геометрическое место точек, удаленных от точки A(a,b) на одно и тоже расстояние R.

Решение. Если M(x,y) – произвольная точка искомого геометрического места, то всегда |AM|=R или $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – искомое уравнение.

§ 2. Линии и их уравнения

Понятия уравнения линии является дальнейшим развитием метода координат. Если точка в аналитической геометрии на плоскости определяется двумя числами (координатами точки), то линия определяется уравнением, связывающим координаты любой точки линии (уравнение линии). Составление уравнения линии заключается в алгебраической записи свойства, характеризующего эту линию как геометрическое место точек.

Точка пересечения двух линий, заданных уравнениями, может быть найдена путем решения системы, образованной из этих уравнений.

На примере уравнения окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ видно, что кроме текущих координат x и y , уравнение может содержать еще и некоторые величины, остающиеся неизменными для данной фиксированной линии, но изменяющиеся при переходе к другой линии того же типа. В нашем примере это величины a, b и R, имеющие для каждой окружности свое значение. Такие величины называются параметрами, они определяют форму и размеры линии (например, параметр R в уравнении окружности), а также положение ее на плоскости относительно системы координат (как, например, координаты a и b центра окружности).

Пример. Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой x = -2 и точки F (2,3).

Решение. Пусть M(x,y) – произвольная точка искомой линии.

Расстояние от точки M до прямой x=-2 есть длина перпендикуляра MN, опущенного из M на прямую. Определим координаты точки N. Очевидно, что абсцисса точки N равна –2, а ордината точки N равна ординате точки M, т.е. N(-2,y). По условию задачи |MN|=|MF|. Следовательно, для любой точки M(x,y), принадлежащей искомой линии, справедливо равенство:

$\sqrt{(x+2)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

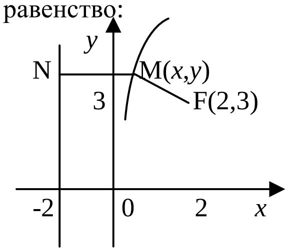
или $(x-2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$

Упростим полученное уравнение:

$x^2+4x+4=x^2-4x+4+(y-3)^2$

или $8x=(y-3)^2$

Это и есть искомое уравнение.



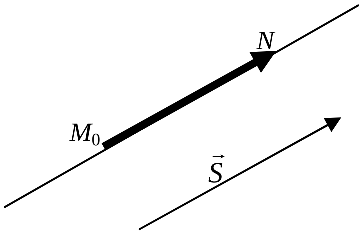
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Напишите формулу, по которой определяется расстояние между двумя точками, если: а) точки имеют одинаковые абсциссы, но разные ординаты; б) точки имеют одинаковые ординаты, но разные абсциссы; в) одна из точек совпадает с началом координат.
2. Чем отличаются друг от друга декартовы координаты двух точек, симметричных относительно оси Oy?
3. Как выражаются координаты середины отрезка через координаты его концов?
4. Как по координатам трех точек установить, лежат ли они на одной прямой?
5. Как убедиться, что данная точка лежит на данной линии?
6. Как найти точку пересечения двух линий, заданных своими уравнениями?
7. Всегда ли уравнение вида $f(x,y)=0$ определяет некоторую линию на плоскости? Приведите примеры?

Литература: [1] (95-103); [2] (101-108); [3] (10-16); [4] (34-51); [5] (20-21,28,37-39); [6] (20-25,29-37); [9] (6-15).

§ 3. Уравнение прямой линии в пространстве R^2: общее, каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

В декартовой системе координат прямая представлена уравнением первой степени и, наоборот, всякое уравнение первой степени $Ax+By+C = 0$ представляет некоторую прямую. Различные виды уравнения прямой (с угловым коэффициентом, каноническое и т.п.) являются частными случаями этого общего уравнения.



Построим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{S}=(l,m)$. Возьмем любую точку N (x,y), лежащую на заданной прямой. Вектор $\overrightarrow{MN}$ всегда будет параллелен вектору $\vec{S}$.

Условие параллельности векторов $\overrightarrow{MN}$ =(x-x_0; y-y_0) и $\vec{S}=(l,m)$, дает каноническое уравнение прямой линии на плоскости:

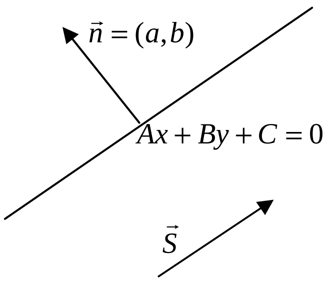
$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \tag{1}$$

Введем вектор $\vec{n}=(A,B)$, перпендикулярный искомой прямой. Тогда из условия перпендикулярности векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{MN}$ можно записать $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0$. В результате получаем уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ или

$$Ax+By+C=0, \tag{2}$$

где $C=-Ax_0-By_0$.

Уравнение (2) называется общим уравнением прямой на плоскости. Вектор $\vec{n}=(a,b)$ называется нормальным.



Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $Q(2,-3)$ параллельно оси Oy.
Решение. В качестве направляющего вектора $\vec{S}$ можно взять орд $\vec{j}=(0,1)$. Подставив данные в уравнении (1), получим : $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+3}{1}$. Это каноническое уравнение обычно переписывают в общем виде: x-2=0 или x=2.

При $B\neq 0$ общее уравнение прямой (2) можно переписать в виде:

$$y=kx+b, \tag{3}$$

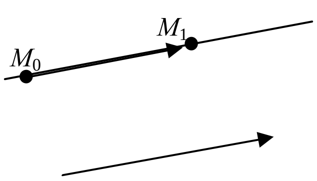
где $k=-\dfrac{A}{B}, b=-\dfrac{C}{B}$.

Уравнение (3) называется уравнением с угловым коэффициентом; угловой коэффициент $k=tg\alpha$, где α- угол наклона прямой к оси Ox. При $k=0$ $(\alpha=0)$ уравнение (3) дает прямую, параллельную оси Ox. Из уравнения (3) нельзя получить уравнение прямой, параллельной оси Oy. Поэтому все семейство наклонных прямых (3) дополняется прямыми:

$$x=a, \tag{4}$$

параллельными оси Оу. Уравнение (4) получено из уравнения (2) при B=0, где $a=-\dfrac{C}{A}$.

<u>Уравнение прямой, проходящей через 2 точки</u>



Пусть даны точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Требуется написать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Для решения задачи воспользуемся уравнением (1). В

$\vec{S}$

качестве направляющего вектора $\vec{S}$ воспользуемся вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$:

$\vec{S} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$. Подставим $l = x_1 - x_0$ и $m = y_1 - y_0$ в каноническое уравнение (1), получим уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{5}$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении

Пусть дана точка $M_0(x_0,\ y_0)$. Требуется написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 в заданном направлении.

Задачу будем решать в зависимости от того, как определено направление прямой. Если направление задается вектором $\vec{S}$, то такая прямая описывается уравнением (1). Если задан угловой коэффициент $k = k_1$, то уравнение прямой будет находить в форме (3): $y = k_1x + b$. Неизвестный коэффициент b найдем из условия $y_0 = k_1x_0 + b$ (точка M_0 принадлежит прямой). Найденное $b = y_0 - k_1x_0$ подставим в уравнение $y = k_1x + b$. Искомое уравнение прямой запишем в виде:

$$y - y_0 = k_1(x - x_0). \tag{6}$$

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку Q(2,7) параллельно прямой $2x$-$4y$+3=0.

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой $2x-4y+3=0$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $\quad k = \frac{1}{2}$.

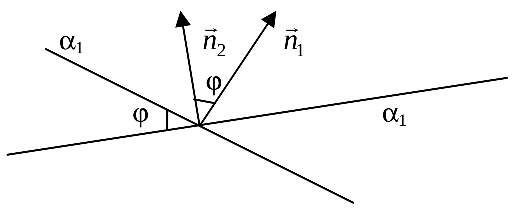
Для искомой прямой угловой коэффициент будет таким же, так как прямые параллельны. Подставим данные в уравнение (6):

$$y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2).$$

§ 4. Угол между двумя прямыми.

Даны уравнения двух прямых. Требуется найти угол между ними. Угол между двумя непараллельными прямыми α_1 и α_2 найдем как угол между направляющими векторами этих прямых при задании канонических уравнений для α_1 и α_2, или же как угол между их нормалями, если заданы общие уравнения прямых α_1 и α_2.

Пусть заданы две прямые α_1: $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$ и α_2: $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$. Направляющие векторы этих прямых: $\overrightarrow{S_1} = (l_1, m_1)$ и $\overrightarrow{S_2} = (l_2, m_2)$.



Угол φ между прямыми найдем из скалярного произведения векторов $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

Пусть заданы общие уравнения прямых α_1 и α_2: $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$. Тогда нормали к этим прямым: $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$ и $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

если $\alpha_1: \; y=k_1x+b_1, \quad \alpha_2: \; y=k_2x+b_2,$ то из $k_1x-y+b_1=0$ и $k_2x-y+b=0$ следует: $\cos\varphi=\dfrac{k_1\cdot k_2+1}{\sqrt{k_1^2+1}\cdot\sqrt{k_2^2+1}}$.

Условием перпендикулярности прямых будет соответственно:
$l_1l_2+m_1m_2=0,$ либо $A_1A_2+B_1B_2=0,$.либо $k_1k_2+1=0$.

Из последнего равенства следует, что $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$. Таким образом угловые коэффициенты двух перпендикулярных прямых обратные по величине и противоположны по знаку.

Условием параллельности прямых будет соответствовать:

$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$, либо $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, либо $k_1=k_2$.

§ 5. Расстояние от точки до прямой

Дана прямая $Ax+By+C=0$ и точка $Q(x_1, y_1)$. Требуется найти расстояние от точки Q до прямой. Это расстояние находится по формуле: $h=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (7)

Пример. Даны вершины треугольника ABC: $A(-2,3)$, $B(1,12)$, $C(11,6)$. Найти: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CD, опущенной из вершины C на сторону AB; 3) уравнение медианы AE; 4) уравнение окружности, для которой медиана AE служит диаметром.

Решение. 1. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, имеет вид $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Чтобы найти уравнение стороны AB, подставим координаты точек A и B в уравнение прямой: $\dfrac{y-3}{12-3}=\dfrac{x-(-2)}{1-(-2)}$; $\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{x+2}{3}$; $y-3=3x+6$; $y=3x+9$ (AB).

2. Высота CD перпендикулярна стороне AB, а потому их угловые коэффициенты k_{CD} и k_{AB} удовлетворяют условию $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}$. Из уравнения прямой AB следует, что $k_{AB}=3$, тогда $k_{CD}=-\dfrac{1}{3}$.

Напишем уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении: $y-y_1=k(x-x_1)$. Подставив в уравнение координаты точки C и угловой коэффициент k_{CD} получим искомое уравнение высоты CD:

$$y-6=-\frac{1}{3}(x-11); \quad 3y-18=-x+11; \quad x+3y-29=0 \quad (CD).$$

3. Определим координаты точки E. Применяем формулы деления отрезка пополам: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$. Используя координаты вершин B и C получаем:

$$x=\frac{1+11}{2}=6; \quad y=\frac{12+6}{2}=9, \quad E(6,9).$$

По точкам A и E построим уравнение медианы AE:

$$\frac{y-3}{9-3}=\frac{x+2}{6+2}; \quad \frac{y-3}{6}=\frac{x+2}{8}; \quad \frac{y-3}{3}=\frac{x+2}{4}.$$

4. Уравнение окружности радикса R с центром в точке K (a,b) имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Так как по условию медиана AE является диаметром искомой окружности; то центр окружности K делит отрезок AE пополам. Находим координаты точки K:

$$x=\frac{-2+6}{2}=2; \quad y=\frac{3+9}{2}=6; \quad K(2;6).$$

Чтобы найти радиус R окружности, достаточно найти расстояние между точками A и K. Известно, что расстояние d между двумя точками плоскости M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2) определяется по формуле: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Подставим координаты точек A и K, получаем $AK=\sqrt{(2+2)^2+(6-3)^2}=5$, т.е. $R=5$. Следовательно,
$(x-2)^2+(y-6)^2=25$ – искомое уравнение окружности.

Пример. В треугольнике с вершинами $A(2,3)$, $B(-1,0)$, $C(4,1)$ найти длину высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через сторону BC по формуле (5):

$$\frac{x+1}{4+1}=\frac{y}{1} \text{ или } \frac{1}{5}x+\frac{1}{5}-y=0 .$$

Найдем длину высоты AE по формуле (7):

$$|AE|=\frac{\left|\frac{1}{5}\cdot 2-3+\frac{1}{5}\right|}{\sqrt{\frac{1}{25}+1}}=\frac{2\frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{26}{25}}}=\frac{12}{\sqrt{26}} .$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Каков характерный признак отличает уравнение прямой в декартовой системе координат от уравнения других линий?
2. Как расположена прямая относительно системы координат, если в ее уравнении отсутствует: а) свободный член, б) одна из координат, в) одна из координат и свободный член? Напишите уравнение осей декартовой системы координат.
3. Как вычислить угол между двумя прямыми? Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямых?
4. Как найти угловой коэффициент прямой, если известно ее общее уравнение? Можно ли найти угловой коэффициент прямой не составляя ее уравнения, если известны две ее точки? Если да, то как это сделать?
5. Как найти расстояние от данной точки до данной прямой, заданной уравнением общего вида?
6. Сформулируйте условие параллельности двух прямых.
7. Сформулируйте условие перпендикулярности двух прямых.
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
9. Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
10. Напишите общее уравнение прямой.
11. Как найти угловой коэффициент прямой, если дано ее общее уравнение?
12. Как установить, принадлежит ли точка $M(x,y)$ прямой, имеющей уравнение $Ax+By+C=0$?
13. Как расположена на плоскости прямая, уравнение которой $Ax+By=0$? $Ax+C=0$? $By+C=0$? $Ax=0$? $By=0$?
14. Как найти координаты точки пересечения двух прямых, если даны их уравнения?

Литература: [1] (95-103); [2] (104-108); [5] (39-47); [6] (38-49); [9] (15-25).

ТЕМА 4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Понятие об алгебраических линиях

Определение. Линия на плоскости называется алгебраической, если ее можно задать уравнением $P(x,y)=0$, где $P(x,y)$- целый многочлен от переменных x, y.

Степень многочлена $P(x,y)$ называется порядком линии. Примером алгебраической линии первого порядка является прямая в R^2, заданная уравнением $Ax+By+C=0$, примером линии второго порядка является окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. При обработке данных практики и при построении эмпирических зависимостей часто приходится использовать кривые линии. В этом случае используют алгебраические линии второго порядка.

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид:

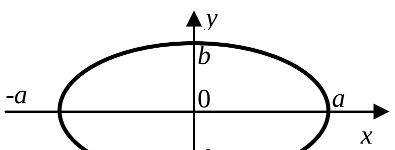
$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0. \tag{1}$$

Чтобы эту линию изобразить в системе координат, уравнение (1) приводят к каноническому виду путем преобразования координат: поворота и параллельного переноса координатных осей. Рассмотрим более простой случай уравнения (1) при $C=0$:

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0. \tag{2}$$

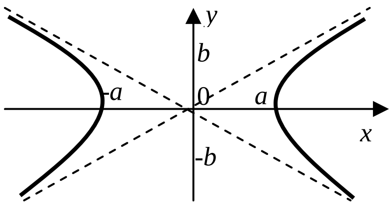
Оно может быть приведено к каноническому виду только параллельным переносом координатных осей.

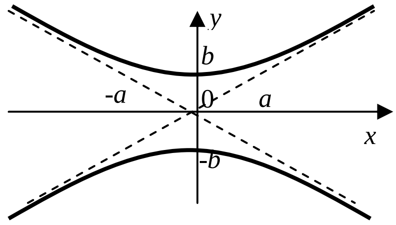
§ 2. Кривые второго порядка, заданные в каноническом виде



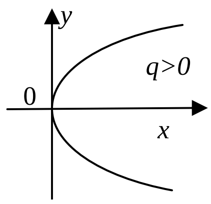
Эллипс задается уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Числа a и b называются полуосями эллипса. При a=b получается окружность.

Гипербола задается уравнениями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ либо $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. При a=b гипербола называется равнобочной. Полуось b в первом случае и полуось а во втором случае называются мнимыми, т.к. линия не пересекает соответствующие оси.

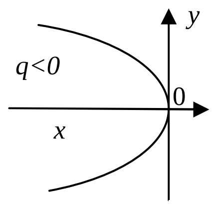


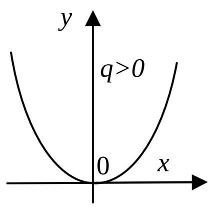


Парабола задается уравнениями: $y^2=qx$ либо $x^2=qy$.

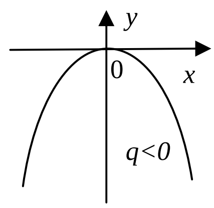


$y^2=qx$





$x^2=qy$



§ 3. Приведение общего уравнения линий второго порядка к каноническому виду

Задача заключается в том, чтобы при анализе уравнения $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ определить вид линии и преобразовать ее в соответствующей системе координат. Сделаем это в два этапа.

1. Выделим в уравнении (2) полные квадраты относительно x и y, если $A\neq 0$ и $B\neq 0$.

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+B\left(y^2+\frac{E}{B}y+\frac{E^2}{4B^2}\right)+\left(F-\frac{D^2}{4A}-\frac{E^2}{4B}\right)=0$$

или $$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+B\left(y+\frac{E}{2B}\right)^2+\Phi=0, \qquad (3)$$

где $\Phi=F-\frac{D^2}{4A}-\frac{E^2}{4B}.$

При A=0, либо B=0 соответствующий квадрат не выделяется.

2. Обозначим $x'=\frac{D}{2A}+x,\quad y'=\frac{E}{2B}+y$, осуществив тем самым переход к новой координатной системе $O'x'y'$ с началом координат в точке $O'\left(-\frac{D}{2A};-\frac{E}{2B}\right)$ именно в этой точке новые координаты x' и y' равны 0.

В новой системе координат уравнение (3) имеет вид $Ax'^2+By'^2+\Phi=0$ или $-\frac{A}{\Phi}x'^2-\frac{B}{\Phi}y'^2=1$.

В канонической записи имеем эллипс или гиперболу (в зависимости от знаков коэффициентов) при $A \neq 0$ и $B \neq 0$ и параболу при A=0 и B=0. Линии изображаем в системе координат $O'x'\ y'$.

Пример. Выделим полные квадраты с x и y:

$(x^2+2x+1)^2+2(y^2-4y+4)-1-8-10=0$,

$(x+1)^2+2(y-2)^2-19=0$

2. Осуществим параллельный перенос координатных осей по формулам $x+1=x'$, $y-2=y'$ в новое начало $O'(-1,2)$.

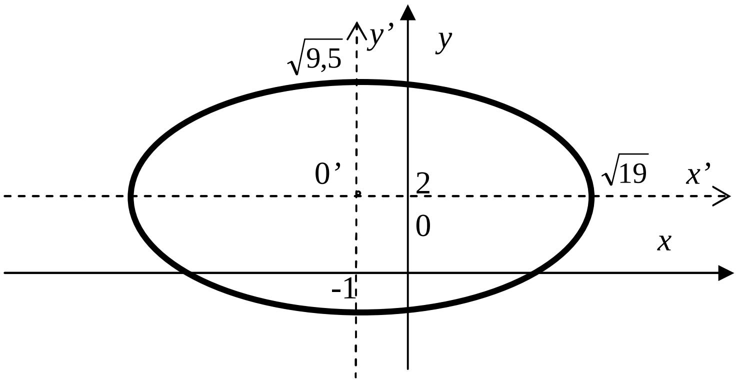
В новой системе координат имеем:

$x'^2+2y'^2-19=0$

или $\dfrac{x'^2}{19}+\dfrac{2y'^2}{19}=1$

в каноническом виде $\dfrac{x'^2}{19}+\dfrac{y'^2}{19/2}=1$.

Получили эллипс с полуосями $a=\sqrt{19}$ и $b=\sqrt{9,5}$.



Пример. Построить кривую $-8y^2+2y+7x-4=0$

Решение. 1. Выделим полный квадрат с y:

$$-8\left(y^2-\frac{1}{4}y+\frac{1}{8^2}\right)+\frac{1}{8}+7x-4=0$$

или $-8\left(y-\dfrac{1}{8}\right)^2=-7x+3\dfrac{7}{8}$.

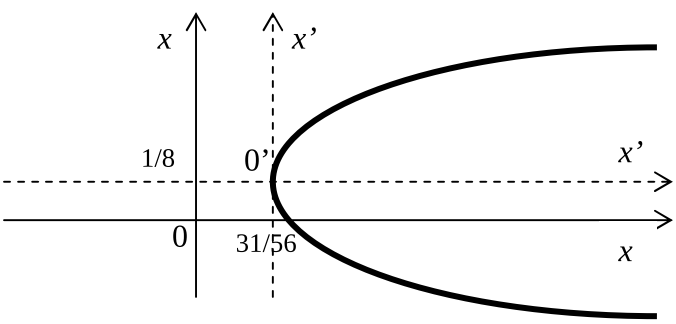
Чтобы ввести формулы преобразования координат при параллельном переносе осей, выделим выражение $x \neq \alpha$ справа:

$$-8\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=-7\left(x-\frac{31}{8\cdot 7}\right).$$

2. Преобразуем координаты: $x-\dfrac{31}{56}=x'$, $y-\dfrac{1}{8}=y'$.

Тогда уравнение $-8y'^2=-7x'$ или $y'^2=\dfrac{7}{8}x'$

Определяем параболу в системе $O'x'y'$ с центром $O'\left(\dfrac{31}{56};\dfrac{1}{8}\right)$



Пример 3. Построить кривую $4x^2$-$5y^2$-$15y$+10=0.

Решение.

$$4x^2-5(y^2+3y)+10=0,\quad 4x^2-5\left(y^2+3y+\frac{3^2}{4}\right)+\frac{5\cdot 9}{4}+10=0;$$

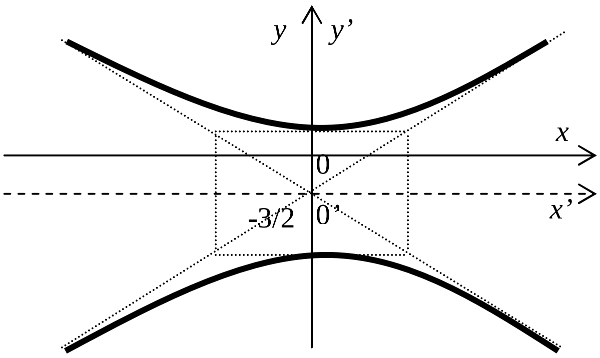
$$4x^2-5\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+21\frac{1}{4}=0;$$

$$x=x^/,\quad y+\frac{3}{2}=y^/\to O^/\left(0;-\frac{3}{2}\right).$$

Имеем $4x^{/2}$-$5y^{/2}$=-21,25 или $-\frac{4x^{/2}}{21{,}25}+\frac{5y^{/2}}{21{,}25}=1$.

Получим каноническое уравнение гиперболы $-\frac{x^{/2}}{\frac{21{,}25}{4}}+\frac{y^{/2}}{\frac{21{,}25}{5}}=1$ с мнимой полуосью

$a=\sqrt{\frac{21{,}25}{4}}$ и $b=\sqrt{\frac{21{,}25}{5}}$.



ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие линии называются кривыми второго порядка?
2. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат?
3. Напишите каноническое уравнение эллипса, приведите чертеж.
4. Напишите каноническое уравнение гиперболы. Какая гипербола называется равносторонней? Приведите чертеж?
5. Напишите каноническое уравнение параболы, симметричной оси Оx, относительно оси Оy. Приведите чертеж.
6. Какие названия носят параметры a и b в канонических уравнениях эллипса и гиперболы и почему они так называются?
7. Что называется центром эллипса и гиперболы?
8. Какой вид будут иметь формулы преобразования координат, если начало координат смещается в точку $O^/(x_0, y_0)$, а направления осей не меняются?
9. Каков будет вид формул преобразования координат, если за новую ось абсцисс принять старую ось ординат, а за новую ось ординат – прямую y-2=0?

Литература: [1] (104-114); [3] (27-31); [4] (52-63); [5] (48-59); [6] (51-63); [9] (25-39).

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера.-М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999.

2. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА-М, 2000.

3. Сборник задач по высшей математики для экономистов: Учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА-М, 2002.

4. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебник для вузов.- М.: Высшая школа, 1996.

5. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов, ч.1.- М.: Высшая школа, 1982.

6. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.- М.: Наука, 1975.

7. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов, ч.2.- М.: Высшая школа, 1982.

8. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Наука, 1987.

9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 1.- М.: Высшая школа, 1986.

10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 2.- М.: Высшая школа, 1986.