Математический анализ

ТЕМА I. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ I. Определения предела и непрерывности функции в точке. Свойства пределов

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для всякого числа $\varepsilon = 0$ существует такое число $\delta > 0$, что как только $|x-x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$), то $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Из непрерывности основных элементарных функций и основных теорем о непрерывных функциях следует, что любая элементарная функция непрерывна во всякой точке, в которой она определена (при этом предполагается, конечно, что функция определена и в окрестности этой точки).

1. Предел постоянной равен самой постоянной, т.е. $\lim\limits_{x \to a} C = C$.
2. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют.
3. $\lim\limits_{x \to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют.
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют и $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Под знаком предела можно производить тождественные преобразования аналитического выражения, задающего функцию, не принимая во внимание поведение функции в предельной точке. Особый интерес приобретает случай преобразования аналитического выражения, задающего функцию $f(x)$, в выражение, задающее функцию $\varphi(x)$, непрерывную в самой точке x_0 и совпадающую с $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 без самой этой точки. Тогда очевидно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \qquad (1)$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{4x^2 - 9x + 2}$ при

а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0 = \infty$.

Решение. а) $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 5x - 2) = -4, \ldots \lim\limits_{x \to 1}(4x^2 - 9x + 2) = -3 \neq 0$.

Так как предел знаменателя отличен от нулю, можно применить теорему о пределе частного (свойство 4). Тогда

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 5x - 2}{4x^2 - 9x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 5x - 2)}{\lim\limits_{x \to 1}(4x^2 - 9x + 2)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{4x^2 - 3x + 2}$.

Имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ следовательно, теорему о пределе частного применить нельзя. Но в окрестности точки $x=2$ имеем $4x^2 - 9x + 2 \neq 0$ (при $x \neq 2$), и поэтому дробь можно сократить на x-2. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители, воспользовавшись формулой $ax^2+bx+c= a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Тогда

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{4x^2 - 9x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x-2)\left(x + 1/3\right)}{4(x-2)\left(x - 1/4\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{4x-1} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 2}(3x+1)}{\lim\limits_{x \to 2}(4x-1)} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{4 \cdot 2 - 1} = \frac{7}{7} = 1.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x-2}{4x^2-9x+2}$.

Имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Чтобы найти предел, разделим числитель и знаменатель на x^2, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x\ \ -5x-2}{4x^2-9x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+5/x-2/x^2}{4-9/x+2/x^2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}5/x-\lim\limits_{x\to\infty}2/x^2}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}9/x+\lim\limits_{x\leftarrow\infty}2/x^2}=\frac{3-0-0}{4-0+0}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $a)\dfrac{3}{4}$; $б)1$; $в)\dfrac{3}{4}$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x+2}-\lim\limits_{x\to1}\sqrt{1-x}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ и $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=0$. Имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, теорему о пределе частного применять нельзя. Преобразуем данное выражение, помножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{x+3-1+x}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{2x+2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x})}{2(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to1}\sqrt{x+3}+\lim_{x\to1}\sqrt{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

<u>§ 2. Первый замечательный предел</u>

Если угол x выражен в радианах, то $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

Первый замечательный предел можно применять в ряде случаев для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Пример. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg12x}{\sin3x}$.

Решение. Здесь неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Преобразуем данную функцию:

$\dfrac{tg12x}{\sin3x}=\dfrac{\sin12x}{\cos12x}\cdot\dfrac{1}{\sin3x}=\dfrac{12}{3}\cdot\dfrac{1}{\cos12x}\cdot\dfrac{\sin12x}{12x}\cdot\dfrac{3x}{\sin3x}$. Обозначим $12x=U$, причем

$\lim\limits_{x\to 0} U = \lim\limits_{x\to 0}(12x) = 12\lim\limits_{x\to 0} x = 12\cdot 0 = 0,$ т.е. $x \to 0$ и $U \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{12x} = \lim\limits_{U\to 0}\dfrac{U}{U} = 1$.

Аналогично, положив 3*x*=*U*, получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x} = \lim\limits_{U\to 0}\dfrac{U}{\sin U} = 1;$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 12x} = \dfrac{1}{\cos 0} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Следовательно $\lim\limits_{x\to 0} {tg12x}/{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\left({12}/{3}\cdot {1}/{\cos 12x}\cdot {\sin 12x}/{12x}\cdot {3x}/{\sin 3x}\right) =$

$${12}/{3}\lim\limits_{x\to 0} {1}/{\cos 12x}\cdot \lim\limits_{x\to 0} {\sin 12x}/{12x}\cdot \lim\limits_{x\to 0} {3x}/{\sin 3x} = {12}/{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 6x}{3x}$. Имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Решение. Обозначим *a*rctg6*x*=U, тогда 6x=tgU и при $x \to 0$ имеем $U \to 0$. Следовательно,

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 6x}{3x} = \lim\limits_{U\to 0}\frac{U}{{1}/{6}\cdot 3\cdot tgU} = \lim\limits_{U\to 0}\left(2\cdot\frac{U}{tgU}\right) = 2\lim\limits_{U\to} {U}/{tgU} =$$

$$2\lim\limits_{U\to 0}\left(\frac{U}{\sin U}\cdot\cos U\right) = 2\cdot\lim\limits_{U\to 0} {U}/{\sin U}\cdot\lim\limits_{U\to 0}\cos U = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

<u>§ 3. Второй замечательный предел</u>

Он имеет вид $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+{1}/{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$.

где *e* - иррациональное число, приблизительно равное 2,71828…. Логарифмы с основанием *e* называются натуральными и обозначаются $\log_e x = \ln x$. С помощью этого предела раскрывают неопределенность вида «1^∞ ».

Пример. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+3}{4n-2}\right)^{3n-1}$. Здесь неопределенность вида $\left\{1^\infty\right\}$.

Решение. Преобразуем выражение в скобках.

$$\frac{4n+3}{4n-2} = \frac{4n-2+5}{4n\cdot 2} = \frac{4n-2}{4n-2} + \frac{5}{4n-2} = 1 + \frac{5}{4n-2}.$$

Обозначим. ${5}/{4n-2} = \alpha$, тогда $4n-2 = {5}/{\alpha}$, $4n = {5}/{\alpha} + 2$, $n = {5}/{4\alpha} + {1}/{2}$, $3n-1 = {15}/{4\alpha} + {1}/{2}$, причем при $n\to\infty$, имеем $\alpha\to 0$. Следовательно,

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{4n-2}\right)^{3n-1} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{{15}/{4\alpha}+{1}/{2}} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{15}{4\alpha}}\cdot(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \left(\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^{15/4}\cdot\sqrt{\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)} = e^{15/4}\cdot 1 = e^{15/4} = \sqrt[4]{e^{15}}$$

Ответ. $\sqrt[4]{e^{15}}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определение понятия функции. Что называется областью определения функции?
2. Какие способы задания функциональной зависимости вы знаете? Приведите примеры.
3. Какие функции называются элементарными? Приведите примеры.
4. Сформулируйте определение понятия предела функции.
5. В каком случае функция называется бесконечно малой?
6. В каком случае функция называется бесконечно большой?
7. Сформулируйте и докажите основные теоремы о бесконечности малых.
8. Сформулируйте и докажите основные теоремы о пределах.
9. Чему равен предел отношения синуса к аргументу при стремлении аргумента к нулю?
10. Как определяется число *e*?
11. Что называется натуральным логарифмом?
12. Что называется приращением аргумента и функции?
13. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке и на данном множестве *X*.
14. Сформулируйте основные теоремы о непрерывных функциях?

Литература: [1] (141-165); [2] (175-205); [3] (142-148); [4] (69-99); [5] (60-96); [6] (71-145).

ТЕМА 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Основные понятия

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если он существует и конечен.

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x. она всегда будет и непрерывной в этой точке.

Производная обозначается $y^{/}$, $f^{/}(x)$, dy/dx, $df(x)/dx$.

Имеем $y^{/} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$. По определению функции $\Delta y/\Delta x = y^{/} + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $x \to 0$. Отсюда $\Delta y = y^{/} \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

При малых значениях Δx и при $y' \neq 0$ имеем $\Delta y \approx y' \Delta x$.

Определение. Главная часть $y'\Delta x$ приращения Δy функции, линейная относительно Δx, называется дифференциалом функции и обозначается $dy = y' \cdot \Delta x$.

Положив $y=x$, получим $dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ и поэтому $dy = y'dx$.

Эта формула верна и в том случае, если x есть функция новой переменной t.

§ 2. Основные формулы дифференцирования

Пусть С – действительное число, $U=U(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ - дифференцируемые функции.

1. $(C)' = 0$;
2. $(C \cdot \upsilon)' = C\upsilon'$;
3. $(U \pm \upsilon)' = U' \pm \upsilon'$;
4. $(U \cdot \upsilon)' = U'\upsilon + U\upsilon'$;
5. $\left(U/\upsilon\right)' = \frac{U'\upsilon - U\upsilon'}{\upsilon^2}$.

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то y называется сложной функцией от x. если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ дифференцируемы, то $dy/dx = dy/du \cdot du/dx$ или $y' = f'(u) \cdot u'$.

§ 3. Таблицы производных

1. $(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$.

Следствие: $(x)^{/}=1$

2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot U'$.

Следствие: $(e^u)^{/}=e^u u^{/}$.

3. $(\log_a U)' = \frac{1}{U \cdot \ln a} \cdot U'$.

Следствие: $(\ln U)' = 1/U \cdot U'$.

4. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$.
5. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$.
6. $(tgU)' = 1/\cos^2 U \cdot U'$.
7. $(ctgU)' = -1/\sin^2 U \cdot U'$.

8. $\left(\arcsin U\right)' = \dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$. 9. $\left(\arccos U\right)' = -\dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$.

10. $\left(arctgU\right)' = \dfrac{U'}{\left(1+U^2\right)}$. 11. $\left(arctgU\right)' = -\dfrac{U'}{\left(1+U^2\right)}$.

Пример. Найти производные заданных функций:

1) $y = \left(\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 2\right)^3$.

Решение. Применим формулу $\left(U^n\right)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$, здесь n=3, $U = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 1$. Тогда

$$y' = 3\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 2\right)^{3-1} \cdot \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 2\right)'.$$

Найдем $U^{/}$

$$U' = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 2\right)' = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' - \left(2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)' + (2)' =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4\right)' - \left(2x^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{4}\left(x^4\right)' - 2\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^{4-1} - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = x^3 + \frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}} = x^3 + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^5}.$$

Следовательно, $y' = 3\left(\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)^2 \cdot \left(x^3 + \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x^5}\right)$.

2. $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{x^5-1}{5x+2}}$.

Решение. Преобразуем сначала данную функцию, а затем найдем производную этой функции:

$$y = \ln\sqrt[5]{\frac{x^5-1}{5x+2}} = \ln\left(\frac{x^5-1}{5x+2}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x^5-1}{5x+2}\right) = \frac{1}{5}\left(\ln(x^5-1) - \ln(5x+2)\right).$$

Тогда

$y' = \left(\dfrac{1}{5}\left(\ln\left(x^5-1\right) - \ln\left(5x+2\right)\right)\right)' = \dfrac{1}{5}\left(\left(\ln\left(x^5-1\right) - \left(\ln\left(5x+2\right)\right)'\right)\right)$. Для нахождения производных $\left(\ln(x^5-1)\right)'$ и $\left(\ln(5x+2)\right)'$ применим формулу: $\left(\ln U\right)' = \dfrac{U'}{U}$.

Получим:

$$y' = \frac{1}{5}\left(\frac{(x^5-1)'}{x^5-1} - \frac{(5x+2)'}{5x+2}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{(x^5)-(1)'}{x^5-1} - \frac{5(x)'+(2)'}{5x+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{5x^4-0}{x^5-1} - \frac{5+0}{5x+2}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{5x^4}{x^5-1} - \frac{5}{5x+2}\right) =$$

$$= \frac{x^4}{x^5-1} - \frac{5}{5x+2} = \frac{4x^5+2x+1}{(x^5-1)(5x+2)}.$$

3. $y = arctg\dfrac{1}{x-2} + \arccos\sqrt{x+2}$.

Решение.

$$y' = \left(arctg\frac{1}{x-2} + \arccos\sqrt{x+2} \right)' = \left(arctg\frac{1}{x-2} \right)' + \left(\arccos\sqrt{x+2} \right)'.$$

Для нахождения производной $arctg\frac{1}{x-2}$ применим формулу $\left(arctgU\right)' = \frac{U'}{1+U^2}$. Здесь $U = \frac{1}{(x-2)}$. Тогда

$$\left(arctg\frac{1}{x-2} \right)' = \frac{\left(\frac{1}{x-2}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} = \frac{\left((x-2)^{-1}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} = \frac{(-1)(x-2)^{-1-1}}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(x-2)^2}}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{(x-2)^2}}{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}} = -\frac{1}{(x-2)^2+1} = -\frac{1}{x^2-4x+5}.$$

Для нахождения производной $\left(\arccos\sqrt{x+2}\right)'$ применим формулу $\left(\arccos U\right)' = -\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$. Тогда

$$\left(\arccos\sqrt{x+2}\right)' = \frac{-(\sqrt{x+2})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x+2})^2}} = \frac{-\left((x+2)^{\frac{1}{2}}\right)'}{\sqrt{1-x-2}} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}(x+2)^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{-x-1}} = -\frac{\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-x-1}} = -\frac{1}{2\sqrt{-x(x+2)}}.$$

Следовательно, $y' = -\frac{1}{x^2-4x+5} - \frac{1}{2\sqrt{-x(x+2)}}$.

4. $y = 6^{tgx} - x^2\cos 2x$.

Решение. $y' = \left(6^{tgx} - x^2\cos 2x\right)' = \left(6^{tgx}\right)' - \left(x^2\cos 2x\right)$.

Найдем: $\left(6^{tgx}\right)'$ по формуле $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot U'$.

Будем иметь $\left(6^{tgx}\right)' = 6^{tgx} \cdot \ln 6 (tgx)' = 6^{tgx} \cdot \ln 6 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

Производную $(x^2\cos 2x)'$ найдем по формуле $\left(U \cdot \upsilon\right)' = U'\upsilon + U\upsilon'$ и $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$. Тогда

$$\left(x^2\cos 2x\right)' = (x^2)' \cdot \cos 2x + x^2 \cdot (\cos 2x)' = 2x\cos 2x + x^2(-\sin 2x)(2x)' =$$

$$= 2x\cos 2x - 2x^2\sin 2x = 2x(\cos 2x - x\sin 2x).$$

Следовательно,

$$y' = 6^{tgx} \cdot \ln 6 \frac{1}{\cos^2 x} - 2x(\cos 2x - x\sin 2x).$$

Пример. Вычислить приближенное значение $\sqrt[5]{252}$, заменив в точке x=243 приращение функции $y = \sqrt[5]{x}$ дифференциалом.

Имеем: $\Delta y \approx dy$, т.е. $\Delta y = \sqrt[5]{x+\Delta x} - \sqrt[5]{x}$.

В нашем примере x=243, $x + \Delta x = 252$, тогда $\Delta x = 252 - 243 = 9$,

$$dy = y'dx = \left(\sqrt[5]{x}\right)' dx = \left(x^{1/5}\right)' dx = \frac{1}{5}x^{1/5-1}dx = \frac{1}{5}x^{-4/5}dx = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}dx.$$

Отсюда

$$\Delta y = \sqrt[5]{252} - \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{243+9} - \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{243+9} - 3,$$

$$dy = \frac{1}{5\sqrt[5]{243^4}}\Delta x = \frac{1}{5\left(\sqrt[5]{243}\right)^4}\cdot 9 = \frac{1}{5\cdot 3^4}\cdot 9 = \frac{1}{5\cdot 3^2} = \frac{1}{45}.$$

Поэтому $\sqrt[5]{252} - \sqrt[5]{243} \approx \frac{1}{45}$.

Следовательно, $\sqrt[5]{252} \approx \sqrt[5]{243} + \frac{1}{45} = 3 + \frac{1}{45} \approx 3{,}022$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определение производной.
2. Каков геометрический смысл производной.
3. Что называется касательной к кривой? Как составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$?
4. Каков механический смысл первой и второй производной?
5. Может ли функция иметь производную в точке, в которой она разрывна?
6. Функция в данной точке дифференцируема. Следует ли отсюда, что она непрерывна в этой точке?
7. Сформулируйте общие правила дифференцирования функций и напишите формулы дифференцирования основных элементарных функций.
8. Как найти производную неявной функции?
9. Что называется дифференциалом функции и дифференциалом независимой переменной?
10. Какой экономический смысл производной?
11. Каков геометрический смысл дифференциала функции?
12. Чем отличается дифференциал функции от ее приращения?

Литература: [1] (176-198); [2] (206-221); [3] (149-162); [4] (104-126); [5] (97-122); [6] (147-82).

ТЕМА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Одним из важнейших приложений дифференцированного исчисления является исследование функции с целью построения ее графика.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в интервале $]a;b[$, если при $x_2>x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$, и убывающей, если $f(x_2) < f(x_1)$.

Достаточные признаки возрастания и убывания функции:

если функция f(x) в каждой точке интервала $]a;b[$ имеет положительную производную, то сама функция в этом интервале возрастает;

если функция f(x) в каждой точке интервала $]a;b[$ имеет отрицательную производную, то сама функция в этом интервале убывает.

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет экстремум (максимум или минимум) в точке $x=x_0$, если $f(x)$ является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой двухсторонней окрестности этой точки.

Необходимое условие экстремума функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю либо не существует.

Значения аргумента, при которых функция $f(x)$ сохраняет непрерывность, а ее производная $f^{/}(x)$ обращается в нуль или не существует, называются *стационарными точками*.

Первый достаточный признак экстремума функции.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0 и ее производная слева от этой точки положительная, а справа отрицательная, то в точке x_0 функция достигает максимума; если производная слева от стационарной точки x_0 отрицательная, а справа – положительная, то в точке x_0 функция достигает минимума; если производная слева и справа от стационарной точки x_0 имеет одинаковый знак, то в этой точке функция экстремума не имеет.

Второй достаточный признак экстремума.

Если в стационарной точке x_0 вторая производная отлична от нулю, то в этой точке функция $y = f(x)$ имеет максимум при $f''(x_0) < 0$ и минимум при $f''(x_0) > 0$.

Определение. Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой на интервале $]a;b[$, если $a<x<b$ она расположена ниже касательной, проведенной в любой точке интервала $]a;b[$.

Определение. Кривая $y = f(x)$ называется вогнутой на интервале $]a;b[$, если при $y = f(x)$ она выше касательной, проведенной в любой точке интервала $]a;b[$.

Определение. Точки, отделяющие выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой (или наоборот), называются точками перегиба кривой.

Признаки выпуклости и вогнутости кривой.

Если вторая производная функции $y''(x)$ положительна во всех точках интервала $]a;b[$, то на этом интервале график функции является вогнутым;

Если вторая производная функции $y''(x)$ отрицательная во всех точках интервала $]a;b[$, то на этом интервале график функции является выпуклым.

Определение. Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от центра координат.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Если существуют пределы

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = K$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - Kx] = b$, то прямая $y=kx+b$ есть наклонная асимптота кривой $y = f(x)$.

Для построения графика функции ее можно исследовать по следующей схеме:

1) Найти область определения функции, интервалы непрерывности и точки разрыва функции. Найти вертикальные асимптоты, исследуя изменение функции при x, стремящемся к точке разрыва функции.

2) Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.

3) Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции. Вычислить значения экстремумов.

4) Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.

5) Найти горизонтальные и наклонные асимптоты кривой (если они существуют). Найти точки пересечения кривой с осями координат (если они существуют; на графике они уже будут видны).

Пример 1. Исследовать функцию и построить ее график: $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$.

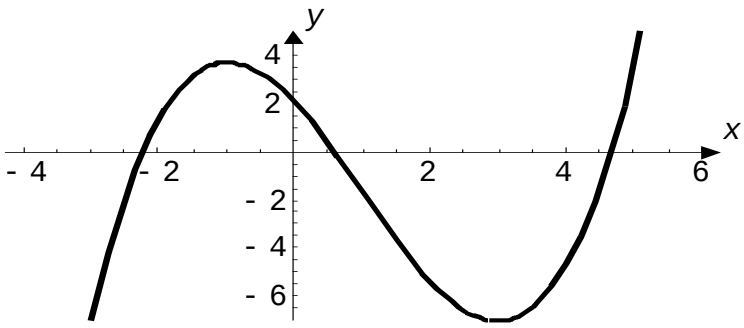
Решение. Функция $y(x)$ точек разрыва не имеет. Область определения – вся числовая ось. Вертикальных асимптот нет. Горизонтальных и наклонных асимптот нет.

Исследуем данную функцию на экстремум. Определим критические точки. Для этого находим первую производную данной функции и приравниваем ее к нулю: $y' = x^2 - 2x - 3, \quad x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решая последнее уравнение, находим его корни: x_1=-1, x_2=3. таким образом, x_1=-1 и x_2= 3 – критические точки. Так как производная $f'(x)$ существует при любом значении x, то других критических точек не имеется.

Исследуем критическую точку x=-1. Производная y' представим в виде произведения двух сомножителей: $y' = (x+1)(x-3)$. Из этого равенства видно, что при x<-1 производная $f'(x)$ положительная, а при –1<x<3 производная $f'(x)$ отрицательна. Следовательно, в интервале $]-\infty;-1[$, функция возрастает, а в интервале $]-1,3[$ - убывает. Так как производная y' при переходе через критическую точку x=-1 меняет свой знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум.

Аналогично исследуем точку x_2=3. и убеждаемся, что в этой точке функция имеет минимум. Найдем экстремум $y_{\max} = 3\dfrac{2}{3}$, $y_{\min} = -7$. Из второй производной $y''(x) = 2x - 2$ найдем точку x=1, подозрительную на точку перегиба. Так как при переходе через эту точку $y''(x)$ меняет знак, то точка x=1 является точкой перегиба. В интервале $]-\infty;1[$ график функции является выпуклым, так как $y''(x) < 0$; в интервале $]1;+\infty[$ - график вогнут, так как $y''(x) > 0$. Строим график.



Пример 2. Исследовать функцию и построить ее график $y=\dfrac{(x^3+4)}{x^2}$.

Решение. Найдем производные: $y'=\dfrac{(x^3-8)}{x^3}; y''=\dfrac{24}{x^4}$.

Область определения $D(y)=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

Свойствами четности, нечетности функция не обладает. График пересекается с осью Оx в точке $x=\sqrt[3]{-4}$. Критические точки: x=2, x=0. последняя не входит в область определения, поэтому ее не рассматриваем. Найдем y(2)=3. нанесем точку (2;3) на плоскость Оxy.

Исследуем поведение y в окрестности точки x=2. при $x=2-\varepsilon$, y'<0, при $x=2+\varepsilon$, y'>0. Следовательно в точке x=2 функция имеет минимум. На промежутке $\left]-\infty;0\right[$ $y'>0$, следовательно функция возрастает. Исследуем направление выпуклости графика. Всюду $y''>0$, следовательно точек перегиба нет и кривая всюду выпукла вниз. Исследуем функцию вблизи точки разрыва непрерывности x=0 и при $x\to\infty$, $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=-\infty.$$

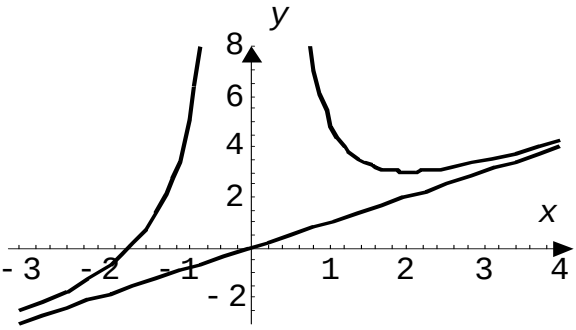
Прямая x=0 – вертикальная асимптота.

Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2\cdot x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+4}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Получим наклонную асимптоту $y=x$. Строим график функции.



ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Каковы признаки возрастания и убывания функции?
2. Покажите, что функция $y=e^x$ возрастает, а функция $y=-x^3-2x$ убывает в любом промежутке?
3. Что называется экстремумом функции? Как найти максимумы и минимумы функции? Сформулируйте два правила. Что такое стационарная точка?
4. Приведите пример, показывающий, что обращение производной в ноль не является достаточным условием экстремума функции?
5. Чем отличается максимум функции, заданной на некотором отрезке, от ее наибольшего значения? То же о минимуме и наименьшем значении функции.
6. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке? Всегда ли они существуют?
7. Как находятся интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции? Приведите примеры.

8. Что называется асимптотой кривой?
9. Как находятся вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции.
10. Каковы основные пункты общей схемы исследования функции и построения ее графика?

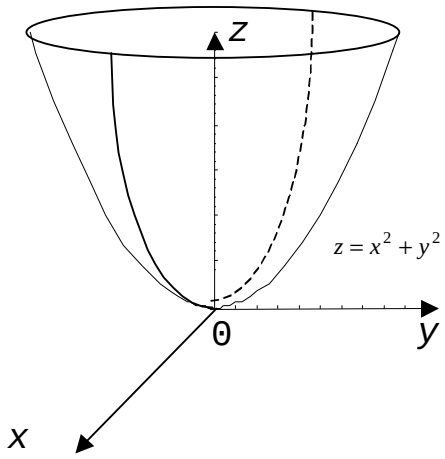
Литература: [1] (216-234); [2] (233-245); [3] (169-178); [4] (140-150); [5] (122-145); [6] (84-214).

ТЕМА 4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

Определение. Переменная z называется функцией переменных x и y, если при каждой паре значений x и y в некоторой области их изменения поставлено в соответствие одно значение z. Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде $z = F(x;y)$. Это уравнение определяет некоторую поверхность в пространстве R^3.

Геометрическим образом функцию $z=x^2+y^2$ является параболоид. Пусть $z=a$, тогда $x^2+y^2=a$, т.е. линия пересечения плоскости $z=a$ с поверхностью $z=x^2+y^2$ есть окружность $x^2+y^2=a$ радиуса $R=\sqrt{a}$. Пусть $y=0$, тогда $z=x^2$. следовательно, при пересечении плоскости Oxz с поверхностью получается парабола. Метод сечений дает возможность лучше представить себе геометрический образ данной функции.



Определение. Число A называется пределом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\beta > 0$, что для всех точек $M(x,y)$, для которых выполняется неравенство $|MM_0| < \beta$, будет выполняться неравенство $|f(x;y) - A| < \varepsilon$.

Обозначим $\lim\limits_{x \to x_0} f(x;y) = A$.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$, если имеет место равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x;y) = f(x_0;y_0)$

§ 2. Частные производные и полный дифференциал 1-го порядка.

Определение. Производная от функции $z = f(x;y)$ по x, найденная в предложении, что y остается постоянным, называется частной производной от z по x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $F_x^{/}(x;y)$. Аналогично определяется и обозначается частная производная z по y.

Если функция $z = F(x;y)$ имеет в точке $(x;y)$ непрерывные частные производные, то ее полное приращение может быть представлено в виде:

$$\Delta Z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon\xi, \qquad (1)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\xi = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Определение. Выражение $\frac{\partial z}{dx}\Delta x + \frac{\partial z}{dy}\Delta y$ является главной частью полного приращения Δz и называется полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ и обозначается Δz:

$$dZ = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial y}{\partial x}\Delta y\,. \qquad (2)$$

Полагая в формуле (2) z равным x, найдем $dx = \Delta x$, а при $z=y$ $dy = \Delta y$. Поэтому

$$dz = \frac{\partial z}{dx}dx + \frac{\partial z}{dy}dy\,. \qquad (3)$$

Из (1) следует, что $\Delta z \approx dz$.

Функция $F(x;y)$ называется дифференцируемой в точке $(x;y)$, если она имеет в этой точке полный дифференциал.

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = 5x^2 + 6y + 3x^2y^3$.

Решение. Сначала найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \left(5x^2 + 6y + 3x^2y^3\right)' x = 10x + 0 + 3\cdot 2xy^3 = 10x + 6xy^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(5x^2 + 6y + 3x^2y^3\right)' y = 0 + 6 + 3x^2\cdot 3y^2 = -6 + 9x^2y^2.$$

Производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ найдена в предположении, что y постоянна, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ найдена в предположении, что x постоянна, тогда $x'_y = 0$. По формуле (3):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (10x + 6xy^3)dx + (9x^2y^2 + 6)dy$$

Ответ. $dz = (10x - 6xy^3)dx + (9x^2y^2 + 6)dy$

<u>§ 3. Градиент функции. Производная по направлению.</u>

Определение. $z = F(x;y)$ дифференцируемая функция двух переменных. Тогда вектор $gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$ называется градиентом функции $z = F(x;y)$.

Он обладает следующими свойствами:

$$gradC = \vec{0}, \quad c = const,$$
$$grad(U + \upsilon) = gradU + grad\upsilon,$$
$$grad(CU) = CgradU, \quad C - const,$$
$$grad(U\upsilon) = \upsilon gradU + Ugrad\upsilon,$$
$$grad\frac{U}{\upsilon} = \frac{\upsilon gradU - Ugrad\upsilon}{\upsilon^2}.$$

Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$ - направляющие косинусы некоторого вектора $\vec{\ell}$, т.е. $\vec{\ell} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j}$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$ - производная функции $z = F(x;y)$ в данном направлении $\vec{\ell}$.

<u>§ 4. Экстремум функции двух переменных</u>

Определение. Функция $z = F(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ максимум, если в окрестности этой точки выполняется равенство $F(x;y) < F(x_0,y_0)$. Аналогично определяется минимум функции $z = F(x;y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Необходимый признак экстремума

Если $M(x_0, y_0)$ – точка экстремума дифференцируемой функции $z = F(x;y)$, то

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} = 0, \text{ то есть } dF(x_0,y_0) = 0.$$

Достаточный признак экстремума

Пусть $z = F(x;y)$ - функция, для которой существуют производные первого и второго порядка в точке $M(x_0,y_0)$: $A = F''_{xx}(x_0,y_0)$, $B = F''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = F''_{yy}(x_0,y_0)$. Составим выражение $\Delta = AC - B^2$.

Если $\Delta > 0$, то $M(x_0, y_0)$ – точка экстремума, а именно: точка максимума при $A<0$ (если $C<0$), точка минимума при $A>0$(или $C>0$). Если $\Delta < 0$, то в точке M нет экстремума.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРООВЕРКИ

1. Сформулируйте определение функции нескольких переменных.
2. Что называется областью определения функции нескольких переменных?
3. Как можно изобразить геометрически функцию двух переменных?
4. Что называется линией и поверхностью уровня?
5. Как определяется понятие функции 2-х переменных?
6. Сформулируйте определения частных производных?
7. Что называется полным приращением и полным дифференциалом двух переменных?
8. Как определяется экстремум двух переменных?
9. Что такое градиент функции?
10. Как находится производная функции по направлению?

Литература: [1] (397-427); [2] (246-275); [3] (179-196); [4] (275-298); [5] (146-156); [6] (243-304).

Часть III. ИНТЕГРАЛЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РЯДЫ

ТЕМА 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$, если производная ее $F'(x) = f(x)$.

Определение. Совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = F(x)+C$

Таблица основных интегралов:

1. $\int 1 \cdot dx = x + c$.

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$.

Следствие: $\int e^x dx = e^x + c$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x dx = \sin x + c$.

7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$.

8. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$.

9. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + c; \\ -\arccos x + c. \end{cases}$

10. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} arctgx + c; \\ -arcctgx + c. \end{cases}$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int (U \pm \upsilon) dx = \int U dx \pm \int \upsilon dx;$

2. $\int cU dx = c \int U dx$

Пример. Вычислить интегралы:

1. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$

Проверка. $\left(\frac{x^4}{4}\right)' + (C)' = \frac{1}{4}(x)' + 0 = \frac{1}{4} \div 4 \cdot x^3 = x^3$.

2. $\int\left(x + \frac{1}{x} + 2^x - 3\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int xdx + \int \frac{1}{x}dx + \int 2^x dx -$

$-3\int \sin xdx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + 2^x \cdot \ln 2 + 3\cos x - ctgx + C.$

§ 2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подставок двух видов:

а) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае: $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

б) $U = \psi(x)$, где U- новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке: $\int f(x)dx = \int f[\psi(x)\psi'(x)dx] = \int f(U)dU$.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x}dx$.

Решение. Перепишем данный интеграл в виде $\int (2\ln x + 3)^3 \cdot \frac{1}{x}dx$. Так как производная выражения $2\ln x + 3$ равна 2/*x*, а второй множитель 1/*x* отличается от производной только постоянным коэффициентом 2, то нужно применить подстановку $2\ln x + 3 = t$. Тогда $2 \cdot \frac{dx}{x} = dt$, $\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}dt$. Следовательно,

$\int (2\ln x + 3)^3 \cdot \frac{1}{x}dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln c + 3)^4 + C$.

2. Найти интеграл $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+1}dx$.

Решение. $e^{2x} = t$, тогда $e^{2x}dx = \frac{1}{2}dt$ и

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{2}arctge^{2x} + C.$$

§ 3. Интегрирование по частям

Нахождение интеграла $\int \upsilon dU$ по формуле $\int \upsilon dU = U\upsilon - \int U d\upsilon$ называется интегрированием по частям. Здесь *U*=*U*(*x*), $\upsilon = \upsilon(x)$ непрерывно дифференцируемые функции от *x*. с помощью этой формулы нахождения интеграла сводится к отысканию другого интеграла $\int U d\upsilon$, ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом за *U* берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за $d\upsilon$ - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так например, для интегралов вида $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x dx$, $\int P(x)\cos\alpha x dx$, где *P*(*x*) – многочлен, за υ следует принять *P*(*x*), а за dU соответствует выражение $e^{\alpha x}dx$, $\sin\alpha x dx$, $\cos\alpha x dx$. Для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin\alpha x dx$, $\int P(x)\arccos\alpha x dx$ за υ принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin\alpha x$, $\arccos\alpha x$, а за dU - выражение $P(x)dx$.

Пример. Найти интеграл $\int x \cdot \sin x dx$.

Решение. Положим $\upsilon = x$, $dU = \sin dx$, тогда $d\upsilon = dx$, $U = -\cos x$. Отсюда

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

§ 4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется неправильной.

Пусть необходимо найти интеграл от неправильной рациональной дроби. При помощи деления (по правилу деления многочленов) неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы целой рациональной функции и правильной рациональной дроби. Например,

$$\frac{x^3-6}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{3x-4}{x^2+2x+1}.$$

Затем знаменатель правильной дроби разлагается на множители вида $(x-a)^\alpha$ и $(x^2+\rho x+q)^\beta$, а правильная дробь разлагается на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha(x^2+\rho x+q)^\beta} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+\rho x+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+\rho x+q)^2}+\ldots+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+\rho x+q)^\beta}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$.

Решение. Выделим целую часть данной неправильной дроби:

$$\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5} = x+7+\frac{37x-35}{x^2-6x+5}.$$

Разложим знаменатель на линейные множители по формуле: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $\frac{a}{x^2}+bx+x=0,$ то есть $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$.

$$\frac{37x-35}{x^2-6x+5} = \frac{37x-35}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5} = \frac{Ax-5A+Bx-B}{(x-1)(x-5)} =$$
$$= \frac{(A+B)x-5A-B}{(x-1)(x-5)},$$

откуда получаем систему уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа $\begin{cases} A+B=37; \\ -5A-B=35. \end{cases}$

Решая ее, имеем

$-4=2, A=-\frac{1}{2},\quad B=37-A=37+\frac{1}{2}=37\frac{1}{2},$ значит,

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx = \int\left[x+7+\frac{-1/2}{x-1}+\frac{37\,1/2}{x-5}\right]dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}-7x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+37\frac{1}{2}\ln|x-5|+C.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определение первообразной функции. Докажите, что любые две первообразные одной и той же функции отличаются на постоянное слагаемое.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Постройте кривые семейства $y=\int x dx$, проходящие через точку $M_1(2,1)$, $M_2(2,2)$, $M_3(2,3)$.
4. Каковы основные методы интегрирования функций?
5. Укажите целесообразные подстановки для отыскания интегралов:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx, \quad \int e^{\cos^2 x}\cdot \sin 2x dx, \quad \int \frac{arctgx}{1+x^2}dx,$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{1+4x^6}dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

6. Выведите формулу интегрирования по частям.

Литература: [1] (251-278); [2] (278-286); [3] (202-211); [4] (159-176); [5] (157-177); [6] (231-254).

ТЕМА 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Формула Ньютона – Лейбница

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Пример.

1. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ по формуле Ньютона – Лейбница.

Решение. Имеем

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

2. Вычислить $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Решение. Положим $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$. Если x=1, то t=0, если x=e, то t=1. Следовательно,

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3-0^3\right) = \frac{1}{3}.$$

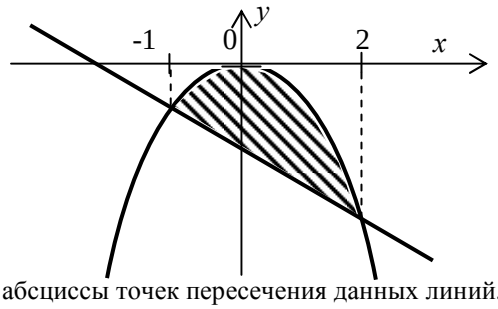
§ 2. Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $\left[f_1(x) \le f_2(x)\right]$ и прямыми x=a и x=b, находится по формуле $S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$

Пример.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями $y = -x^2$, $y = -x-2$.

Решение. Сделаем чертеж.



Найдем абсциссы точек пересечения данных линий.

$-x^2 = -x-2$ или $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Значит,

$$S=\int_{-1}^{2}\left[-x^2-(-x-2)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left[-x^2+x+2\right]dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=-3+1{,}5+4+2=4{,}5.$$

Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси О*x*; находится по формуле: $\nu=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Длина кривой, заданной уравнением $y=f(x),\quad a\le x\le b$, выражается следующим образом: $\ell=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)^2\right)}dx$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется интегральной суммой данной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a;b]$?
2. Что называется определенным интегралом данной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a;b]$? Каковы его основные свойства и геометрический смысл?
3. Напишите формулу Ньютона - Лейбница.
4. В чем состоит способ подстановки и интегрирования по частям для вычисления определенного интеграла?
5. Какие геометрические величины можно вычислять с помощью определенного интеграла? Напишите основные формулы и приведите примеры.
6. Какой экономический смысл определенного интеграла?
7. Напишите формулу трапеции для приближенного вычисления определенного интеграла.
8. Какие из приведенных интегралов являются несобственными: $\int_0^{+\infty}x\sin x dx,\quad \int_0^1\frac{dx}{x+1},\quad \int_{-1}^0\frac{dx}{x+1},\quad \int_0^1\frac{dx}{x-1},\quad \int_{-2}^3\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. Какие из этих несобственных интегралов существуют?
9. Каков геометрический смысл несобственного интеграла?
10. Может ли при вращении бесконечно протяженной кривой вокруг какой-либо прямой образоваться тело конечного объема? Рассмотрите пример кривой $y=e^{-x},\quad (0\le x<+\infty)$, вращающейся вокруг оси О*x*.

Литература: [1] (283-217); [2] (287-303); [3] (212-222); [4] (177-214); [5] (179-208); [6] (255-279, 513-538).

ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные понятия

Определение. Уравнение вида

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0, \qquad (*)$$

связывающее аргумент *x*, функцию *y*(*x*) и ее производные, называется дифференциальным уравнением *n*-го порядка.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения *n*-го порядка называется функция $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$, которая зависит от аргумента *x* и *n* независимых производных постоянных C_1, C_2, … C_n обращающая вместе со своими производными $y^{/}$, $y^{//}$, …,$y^{(n)}$ уравнение (*) в тождество.

Определение. Частным решением уравнения (*) называется решение, которое получается из общего решения, если придавать постоянным C_1, C_2, …, C_n определенные числовые значения.

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение вида $y'+\rho(x)y=f(x)$, где $\rho(x)$ и $f(x)$ непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'+3y=e^{2x}$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям *x*=0, *y*=1.

Решение. Данное уравнение является линейным.

Здесь $\rho(x)=3$ *и* $f(x)=e^{2x}$.

Решение ищем в виде $y = U \cdot \upsilon$, где U и υ - некоторые функции от *x*. находим $y' = U'\upsilon + U\upsilon'$ и подставляем в уравнение значение у и у/ получаем: $U'\upsilon + U\upsilon' + 3U\upsilon = e^{2x}$ или $U'\upsilon + U(\upsilon' + 3\upsilon) = e^{2x}$.

Найдем одно значение υ, при котором выражение в скобках, обращается в нуль. $\upsilon' + 3\upsilon = 0$. Получим уравнение с разделяющимися переменными. Решая его получаем:

$$\frac{d\upsilon}{dx} + 3\upsilon = 0, \quad \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -3dx, \quad \ln x = -3x, \quad \upsilon = e^{-3x}.$$

Подставляем найденное значение υ в исходное дифференциальное уравнение, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$U'e^{-3x} = e^{2x}, \quad U' = e^{5x}, \quad dU = e^{5x}dx, \quad U = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right) \cdot e^{-3x}.$$

Найдем частное решение. Для этого подставим начальные условия в выражение для общего решения и найдем *C*.

$$1 = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right) \cdot e^{-3x}, \quad 1 = \left(\frac{1}{5} + C\right) \cdot 1, \quad C = \frac{4}{5}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + \frac{4}{5}\right)e^{-3x}$.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y'' + \rho y' + qy = f(x)$, где ρ и *q*- вещественные числа, $f(x)$ - непрерывная функция, называются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка вида:

$$y'' + \rho y' + qy = 0, \tag{1}$$

у которого правая часть $f(x)$ равна нулю. Такое уравнение называется однородным.

Уравнение

$$K^2 + \rho K + q = 0 \tag{2}$$

называется характеристическим уравнением данного уравнения (1).

Характеристическое уравнение (2) является квадратным уравнением, имеющим два корня. Обозначим их через K_1 и K_2.

Общее решение уравнения (1) может быть записано в зависимости от величины дискриминанта $D = \rho^2 - 4q$ уравнения (2) следующим образом:

1. При *D*>0 корни характеристического уравнения вещественные и различные ($K_1 \neq K_2$), и общее решение имеет вид $y = C_1e^{K_1x} + C_2e^{K_2x}$.

2. При *D*=0 корни характеристического уравнения вещественные и равные ($K_1 = K_2 = K$), и общее решение имеет вид: $y = e^{Kx}(C_1 + C_2x)$.;

3. Если *D*<0, то корни характеристического уравнения комплексные: $K_{1,2} = \frac{-\rho + \sqrt{D}}{2} = \frac{-\rho \pm i\sqrt{-D}}{2} = \alpha \pm \beta i$, где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица и общее решение $\left(K_1 = \alpha + \beta i, \quad K_2 = \alpha - \beta i, \quad \beta \neq 0\right)$, $\alpha = -\frac{\rho}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2}$ имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Пример 1. Найти общее уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $K^2 + K - 2 = 0$, его корни K_1 = 1, K_2 = -2 вещественные и различные. Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид K^2-2K+1=0, его корни K_1 = K_2 = 1 – вещественные и равные. Общее решение уравнения имеет вид $y = e^x(C_1 + C_2x)$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид K^2-4K+13=0, его корни K_1 = 2+3i, K_2 = 2-3i комплексные. Обще решение уравнения имеет вид $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$y'' + \rho x + qy = f(x), \qquad (3)$$

где $f(x)$ - непрерывная функция, отличная от нуля.

Общее решение такого уравнения представляет собой сумму частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения (3) и общего решения y_o соответствующего однородного уравнения (1):

$$y = y_o + \tilde{y}.$$

Поскольку нахождение общего решения однородного уравнения мы уже рассмотрели, то остаются рассмотреть вопрос о нахождении частного решения. Рассмотрим различные виды правых частей уравнения (3).

1) Пусть правая часть имеет вид $f(x) = e^{\beta x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n. Тогда частное решение $\tilde{y}$ следует искать в виде $\tilde{y} = Q_n(x)x^r\ell^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r – число, показывающее, сколько раз α является корнем характеристического уравнения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_o = e^x(C_1 + C_2x)$ (см. пример 2). Так как правая часть уравнения является многочленом второй степени и ни один не равен нулю (K_1=K_2=1), то частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C – неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$ и подставляя $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$, $\tilde{y}' = 2Ax + B$, $\tilde{y}'' = 2A$ в данное уравнение находим

$A - 4Ax - 2B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1$, или

$Ax^2 + (B - 4A)x + 2A - 2B + C = x^2 + 1$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, имеем A=1, B-4A=0, 2A-2B+C=1, Находим A=1, B=4, C=7. Итак, частное решение данного уравнения имеет вид $\tilde{y} = x^2 + 4x + 7$, а общее решение - $y = e^x(C_1 + C_2x) + x^2 + 4x + 7$.

Пример 5. Найти общее решение уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$y'' + y' - 2y = 3e^{2x}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \; y_0' = 3.$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_o = C_1e^x + C_2e^{-2x}$ (см. пример 1). В правой части данного уравнения стоит произведение многочлена нулевой степени на показательную функцию $e^{\alpha x}$ при $\alpha = 2$. Так как среди корней характеристического уравнения нет корней, равных 2, то частное решение данного уравнения ищем в виде $\tilde{y} = A \cdot e^{2x}$.

Дифференцируя и подставляя $\tilde{y}$ в уравнение получаем:

$4 \cdot A \cdot e^{2x} + 2 \cdot A \cdot e^{2x} - 2Ae^{2x} = 3e^2$ и $4 \cdot A \cdot e^{2x} = 3e^2$,

откуда $4 \cdot A = 3$, $A = \dfrac{3}{4}$.

Подставляя найденное значение A в выражение для $\tilde{y}$, найдем частное решение данного уравнения $\tilde{y} = \dfrac{3}{4}e^{2x}$ и общее решение запишется в виде $y = y_o + \tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \dfrac{3}{4}e^{2x}$. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Для этого продифференцируем у. $y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + \dfrac{6}{4}e^{2x}$.

Подставляем начальные условия в y и y', находим C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + \dfrac{3}{4}, \\ 3 = C_1 - 2C_2 + \dfrac{6}{4}, \end{cases}$$

$$-2 = 3C_2 - \frac{3}{4},\ 3C_2 = -\frac{5}{4},\quad C_2 = -\frac{5}{12},\quad C_1 = \frac{2}{3}.$$

Подставляя найденное значение C_1 и C_2 в выражение для y, найдем частное решение данного уравнения

$$y = \frac{2}{3}e^{x} - \frac{5}{12}e^{-2x} + \frac{3}{4}e^{2x}.$$

2) Пусть правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}(a \cdot \cos\beta x + b \cdot \sin x)$ и $\alpha + \beta \cdot i$ $(\alpha - \beta \cdot i)$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение ищем в виде $\tilde{y} = e^{\alpha x} \cdot (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

Если же $\alpha + \beta \cdot i$ $(\alpha - \beta \cdot i)$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение находим в виде $\tilde{y} = e^{\alpha x} \cdot x \cdot (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \sin 2x$.

Решение. Здесь характеристическое уравнение $K^2 + 1 = 0$ имеет корни $K_1 = i$, $K_2 = -i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. В правой части стоит тригонометрическое функция $\sin 2x$, то есть $a = 0$, $b = 1$, $\beta = 2$. Так как $\beta = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение надо искать в виде: $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Дифференцируя $\tilde{y}$ и подставляя его в дифференциальное уравнение, получим $-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \sin 2x$, откуда $A = 0$, $B = -\dfrac{1}{3}$, т.е. частное решение $\tilde{y} = -\dfrac{1}{3}\sin 2x$, а общее решение уравнения:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Что называется порядком дифференциального уравнения? Приведите примеры.
2. Что называется решением дифференциального уравнения? Приведите примеры.
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое – частным? Каков их геометрический смысл?
4. Каков геометрический смысл начальных условий дифференциального уравнения первого порядка? Как из общего решения дифференциального уравнения первого порядка можно получить его частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условия?
5. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными и как оно интегрируется? Приведите примеры.
6. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным и как оно интегрируется? Приведите примеры.
7. Каков геометрический смысл начальных условий для дифференциального уравнения второго порядка?
8. Какое дифференциальное уравнение второго порядка называется линейным? В каких случаях оно называется однородным и неоднородным?
9. Каковы свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка? Какова структура его общего решения.
10. Какова структура решений неоднородного дифференциального уравнения?
11. Какова зависимость решения от вида правой части?

Литература: [1] (325-353); [2] (352-370); [3] (223-237); [4] (416-448); [5] (209-229); [6] (с. 445-500).

ТЕМА 4.РЯДЫ

§ 1. Основные понятия

Определение. Пусть задана бесконечная последовательность чисел $U_1, U_2, \ldots U_n$. Тогда выражение

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \qquad (1)$$

называется числовым рядом. Здесь U_n - общий член ряда.

Примеры:

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
3. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Определение. Суммы вида $S = U_1, S_2 = U_1 + U_2, \ldots, S_n = \quad = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ называются частными суммами ряда (1).

Определение. Если последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n$ частных сумм имеет предел, то ряд (1) называется сходящимся. Этот предел называется суммой ряда.

§ 2. Признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости. Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$. Обратное утверждение неверно, то есть данное условие может выполняться, но ряд будет расходиться.

Достаточные признаки сходимости.

1. Признак сравнения. Имеем два ряда с положительными членами

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n ; \qquad (2)$$

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n . \qquad (3)$$

Пусть имеется такой номер *N*, что для всех членов ряда, у которых $n \geq N$ выполняется $U_n \leq \upsilon_n$. Тогда из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда (2), а из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (3).

2. Признак Даламбера

Пусть дан ряд с положительными членами

$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$ и существует $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \rho$. Тогда при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ расходится, а при $\rho = 1$ вопрос остается открытым.

§ 3. Знакопеременные ряды

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным.

Знакопеременным называется ряд вида

$U_1 - U_2 + \ldots + (-1)^{n-1} U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n$, где $U_n > 0 \; (n = 1, 2, \ldots)$.

Ряды вида $-U_1 + U_2 - \ldots + (-1)^n U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n$ называются знакочередующимся.

Признак абсолютной сходимости.

Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n = -U_1 + U_2 - U_3 + \ldots + (-1)^n U_n + \ldots \qquad (4)$$

сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = |U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n| + \ldots \qquad (5)$$

Ряд (4) называется в этом случае абсолютно сходящимся. Если ряд (4) сходится, а ряд (5) расходится, то ряд (4) называется условно сходящимся. При этом сходимость ряда (4) можно в ряде случаев установить без исследования ряда (5).

Признак сходимости Лейбница.

Пусть имеется знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}U_n = U_1 - U_2 + \ldots + (-1)^{n-1}U_n + \ldots, \quad U_n > 0 \ (n = 1,2,...)$$

Если одновременно выполняются следующие два условия:

1) $U_1 > U_2 > \ldots > U_n > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

То такой ряд сходится и его сумма $S \in \left]0, U_1\right[$

§ 4. Степенные ряды

Определение. Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots$ называются степенным рядом. Здесь постоянные величины $a_1, a_2, \ldots, a_k \ldots$ – коэффициенты ряда, a_0 - свободный член. Степенные ряды являются одним из видов функциональных рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = U_0(x) + U_1(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

Очевидно, любой степенной ряд сходится при x=0. для любого степенного ряда имеется интервал $(-R, R)$, называемый интервалом сходимости, в каждой точке которого ряд сходится. На границах интервала ряд может либо сходится либо расходится. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, он находится по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Таким образом, поиск области сходимости степенного ряда заключается в определении его радиуса сходимости R и исследования сходимости ряда на границах интервала сходимости (при $x = \pm R$)

Разложение функции $f(x)$ в ряд Маклорена имеет следующий вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{2!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Наиболее употребительны разложения следующих функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \le 1);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots,$$

$$(-1 < x < 1);$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad (-1 \le x \le 1).$$

Пример. Написать три первых члена степенного ряда по заданному общему члену $U_n = a_n x^n$, найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, если $U_n = \dfrac{6^n \cdot x^n}{5^n \sqrt[4]{n}}$.

Решение. Первые три члена ряда будут:

$$U_1 = \frac{6x}{5}, \ U_2 = \frac{6^2 x^2}{5^2 \sqrt[4]{2}}, \ U_3 = \frac{6^3 x^3}{5^3 \sqrt[4]{3}}.$$

Имеем

$$a_n = \frac{6^n}{5^n\sqrt[4]{n}}, \quad a_{n-1} = \frac{6^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt[4]{n+1}}.$$

Определяем радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6/5^n\sqrt[4]{n}}{6^{n+1}/5^{n+1}\sqrt[4]{n+1}} = \frac{5}{6}\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n+1}{n}} = \frac{5}{6}\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} = \frac{5}{6}$$

Интервал сходимости имеет вид: $\left]-\frac{5}{6};\frac{5}{6}\right[$

Пусть $x = -\frac{5}{6}$. Получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(-5/6\right)^n}{5^n\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} = -1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}+\cdots.$$

Применяем к этому знакочередующемуся ряду признак Лейбница:

$$1 > 1/\sqrt[4]{2} > 1/\sqrt[4]{3} > \ldots > 1/\sqrt[4]{n}\ldots; \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n} = 0. \qquad (2)$$

Оба условия выполняются, следовательно ряд при $x = -5/6$ сходится.

Пусть $x = 5/6$. Имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(5/6\right)^n}{5^n\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[4]{n} = 1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\ldots.$$

Сравнивая с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, видим, что, начиная с $n=2$, выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} > 1/n$ поэтому по признаку сравнения ряд расходится (так как расходится гармонический ряд). Область сходимости ряда $\left(-\frac{5}{6};\frac{5}{6}\right)$.

Пример. Вычислить $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001, используя разложение $f(x) = (1+x)^m$ в ряде Маклорена.

Решение.

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\left(1+1/16\right)^{1/4} =$$

Преобразуем $= 2\left[1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1/4\left(1/4-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1/4\left(1/4-1\right)\left(1/4-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3+\right] =$

$$= 2\left[1+0{,}01562-0{,}00037+0{,}000001-\ldots\right].$$

Полученный ряд знакочередующийся и его члены убывают по абсолютной величине, поэтому погрешность не превзойдет первого отброшенного члена.

Очевидно, что $2\cdot 0{,}00001 < 0{,}0001$.

Следовательно, $\sqrt[4]{17} \approx 2(1+0{,}01562-0{,}00037) \approx 2{,}0305$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется суммой сходящегося числового ряда?
2. Почему при исследовании сходимости ряда можно отбрасывать любое конечное число начальных членов ряда?
3. Можно ли утверждать, что ряд сходится, если предел его общего члена равен нулю?
4. Сформулируйте теорему сравнения рядов.
5. В чем состоит признак Даламбера сходимости рядов?

6. Какие числовые знакопеременные ряды называются абсолютно сходящимися и какие условно сходящимися? Приведите примеры.

7. В чем состоит признак Лейбница сходимости рядов?

8. Приведите примеры степенных рядов, имеющих нулевой, конечный и бесконечные радиусы сходимости?

9. Разложите в ряд Маклорена функцию e^{ax}, $\sin bx$, $\cos bx$, $\ln(1+x)$ и найдите область сходимости полученных степенных рядов.

10. Как оценить погрешность при приближенном суммировании знакочередующегося числового ряда?

11. Как оценить погрешность при приближенном суммировании знакопостоянного числового ряда?

12. Можно ли находить приближенные значения функций $y = f(x_0)$, используя их разложение в ряд Маклорена, если x_0 не входит в область сходимости ряда?

Литература: [1] (356-390); [2] (320-330,331-333); [3] (238-253); [4] (379-401); [5] (230-260); [6] (397-426).

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера.-М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999.

2. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА-М, 2000.

3. Сборник задач по высшей математики для экономистов: Учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА-М, 2002.

4. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебник для вузов.- М.: Высшая школа, 1996.

5. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов, ч.1.- М.: Высшая школа, 1982.

6. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.- М.: Наука, 1975.

7. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов, ч.2.- М.: Высшая школа, 1982.

8. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Наука, 1987.

9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 1.- М.: Высшая школа, 1986.

10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 2.- М.: Высшая школа, 1986.